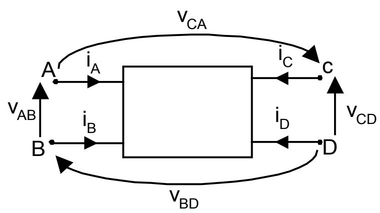
6 LES QUADRIPOLES

6.1 Définitions

D'une manière générale, un quadripôle est décrit comme suit :

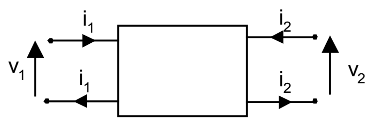


On a :

$$i_A + i_B + i_C + i_D = 0$$

$$v_{AB} + v_{CA} - v_{CD} + v_{BD} = 0$$

Cependant, le terme quadripôle est plutôt utilisé pour un circuit dont les bornes sont groupées par paire.
Alors le courant entrant dans le pôle d'une paire ressort par l'autre pôle de la même paire.
Nous avons le schéma équivalent suivant :



6.2 Description matricielle du quadripôle

Pour relier les 4 paramètres du quadripôle (les deux courants et les deux différences de potentiel), il existent 4 représentations matricielles différentes:

- matrices impédances
- matrices admittances
- matrices hybrides
- matrices de transfert

6.2.1 Matrices impédances

2 équations sont suffisantes pour décrire le quadripôle
On a :

$v_1 = f(i_1, i_2)$

$v_2 = g(i_1, i_2)$

Les deux équations sont :

$$v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$$

$$v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2$$

L'unité des impédances Z_{ij} sont les ohms (Ω). L'indice i est relatif à la tension et indice j est relatif au courant.

Sous forme matricielle nous avons :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

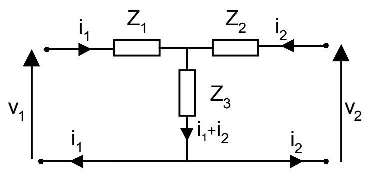
$$\mathbf{v} = \mathbf{Z.i}$$

$\mathbf{v}$ est le vecteur colonne des tensions et $\mathbf{i}$ est le vecteur colonne des courants.
$\mathbf{Z}$ est la matrice impédance de dimension 2x2

Définition 1 : un quadripole est dit réciproque si les termes de la seconde diagonale sont égaux : $Z_{12} = Z_{21}$.
Cette propriété est caractéristique des quadripôles réciproques composés d'éléments passifs (sans générateur de courant et de tension).

Définition 2 :
Si de plus, les termes de la première diagonale sont égaux : $Z_{11} = Z_{22}$, on dit que le quadripole est symétrique.

Exemple 1 : quadripôle en T



Nous avons les deux relations suivantes en appliquant la loi des mailles :

$$v_1 = Z_1 i_1 + Z_3(i_1 + i_2) = (Z_1 + Z_3) i_1 + Z_3 i_2$$

$$v_2 = Z_2 i_2 + Z_3(i_1 + i_2) = Z_3 i_1 + (Z_2 + Z_3) i_2$$

Ainsi, on a :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

Ce quadripole est réciproque. Il est symétrique à la condition que $Z_2 = Z_1$

Nous allons maintenant nous interesser à l'interprétation physique de chacun des différents coefficients de la matrice impédance.

$$Z_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2 = 0}$$

Z_{11} est l'impédance vue de l'entrée en laissant la sortie du quadripole en circuit ouvert ($i_2 = 0$)

$$Z_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1 = 0}$$

Z_{22} est l'impédance vue de la sortie en laissant l'entrée du quadripôle en circuit ouvert ($i_1 = 0$)

$$Z_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1 = 0}$$

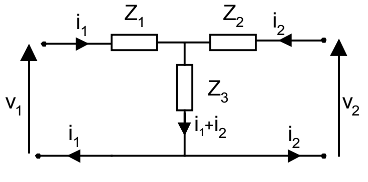
Z_{12} est l'impédance de transfert inverse ou transimpédance inverse obtenue avec l'entrée du quadripôle en circuit ouvert ($i_1 = 0$)

$$Z_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2 = 0}$$

Z_{21} est l'impédance de transfert directe ou transimpédance obtenue avec la sortie du quadripôle en circuit ouvert ($i_2 = 0$)

Ces définitions des coefficients permettent de calculer et de mesurer simplement ceux-ci.

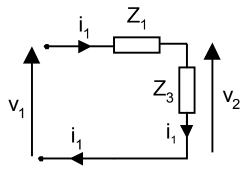
<u>Exemple 1</u> : (suite) quadripôle en T



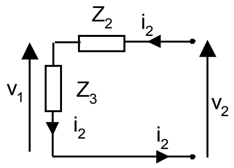
cas $i_2 = 0$

$$Z_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2 = 0} = Z_1 + Z_3$$

$$Z_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2 = 0} = Z_3$$



cas $i_i = 0$

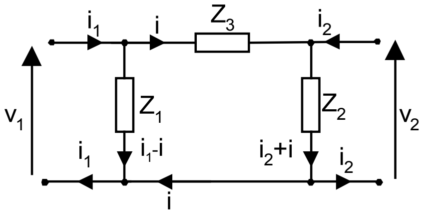


$$Z_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1 = 0} = Z_3$$

$$Z_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1 = 0} = Z_2 + Z_3$$

Nous retrouvons les résultats calculés précédemment.

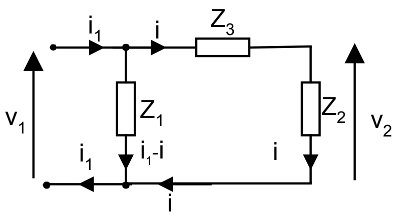
<u>Exemple 2</u> : quadripôle en pi



$$v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$$

$$v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2$$

Comme dans l'exemple précédent, nous allons considérer successivement les cas $i_2 = 0$ et $i_1 = 0$.
cas $i_2 = 0$



$$Z_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2 = 0} = Z_1 \quad // \quad (Z_2 + Z_3)$$

$$= \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$Z_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2 = 0}$$

Pour déterminer ce coefficient, nous devons calculer la relation entre i et i_1.
On a :

$$v_1 = Z_1(i_1 - i) = (Z_3 + Z_2)i$$

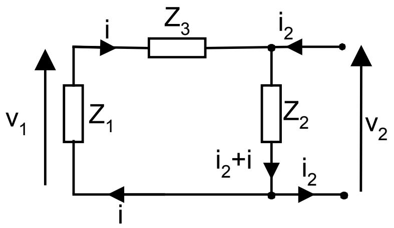
Soit

$$\frac{i_1}{i} = \frac{Z_3 + Z_2 + Z_1}{Z_1}$$

D'ou

$$Z_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2 = 0} = \left.\frac{v_2}{i}\frac{i}{i_1}\right|_{i_2 = 0} = \frac{Z_2 Z_1}{Z_3 + Z_2 + Z_1}$$

cas $i_1 = 0$



$$Z_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1 = 0} = Z_2 \quad // \quad (Z_1 + Z_3) = \frac{Z_2(Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$Z_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1 = 0}$$

Pour déterminer ce coefficient, nous devons calculer la relation entre i et i_2.
On a :

$$v_2 = Z_2(i_2 + i) = -(Z_3 + Z_1)i$$

Soit

$$\frac{i_2}{i} = -\frac{Z_3 + Z_2 + Z_1}{Z_2}$$

D'ou

$$Z_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} = \left.\frac{v_1}{i}\frac{i}{i_2}\right|_{i_1=0} = \frac{Z_2 Z_1}{Z_3 + Z_2 + Z_1}$$

En résumé, nous avons :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \dfrac{Z_1(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3} & \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2+Z_3} \\ \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2+Z_3} & \dfrac{Z_2(Z_1+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3} \end{bmatrix}$$

Le quadripole est donc réciproque. Il est symétrique si

$$Z_1(Z_2+Z_3) = Z_2(Z_1+Z_3)$$

$$\Leftrightarrow \qquad Z_1 = Z_2$$

6.2.2 Matrices admittances

On utilisent les deux équations suivantes pour décrire le quadripôle :

$$i_1 = Y_{11}v_1 + Y_{12}v_2$$

$$i_2 = Y_{21}v_1 + Y_{22}v_2$$

L'unité des admittances Y_{ij} sont les ohms^{-1} (Ω^{-1}). L'indice i est relatif au courant et indice j est relatif à la tension.

Sous forme matricielle nous avons :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{Y.v}$$

$\mathbf{i}$ est le vecteur colonne des courants et $\mathbf{v}$ est le vecteur colonne des tensions.
$\mathbf{Y}$ est la matrice admittance de dimension 2x2

On a la relation suivante entre $\mathbf{Y}$, la matrice admittance et $\mathbf{Z}$, la matrice impédance d'un quadripôle.

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z.i} = \mathbf{Z.Y.v} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Z.Y} = \mathbf{I}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité.
Ainsi, nous avons :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$$

La matrice $\mathbf{Y}$ est l'inverse de la matrice $\mathbf{Z}$. Le passage de l'une à l'autre implique d'inverser la matrice (voir cours de mathématiques sur les matrices).

On a les relations entre les éléments de la matrice admittance $\mathbf{Y}$ et la matrice impédance $\mathbf{Z}$:

$$[Z]=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}. \quad \Rightarrow \quad Y=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.=\begin{bmatrix} \dfrac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22}-Z_{12}Z_{21}} & \dfrac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22}-Z_{12}Z_{21}} \\ \dfrac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22}-Z_{12}Z_{21}} & \dfrac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22}-Z_{12}Z_{21}} \end{bmatrix}$$

Nous allons maintenant nous interesser à l'interprétation physique de chacun des différents coefficients de la matrice admittance.

$$Y_{11}=\left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0}$$

Y_{11} est l'admittance vue de l'entrée lorsque la sortie du quadripôle est en court-circuit ($v_2=0$)

$$Y_{22}=\left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0}$$

Y_{22} est l'admittance vue de la sortie lorsque l'entrée du quadripôle est en court-circuit ($v_1=0$)

$$Y_{12}=\left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0}$$

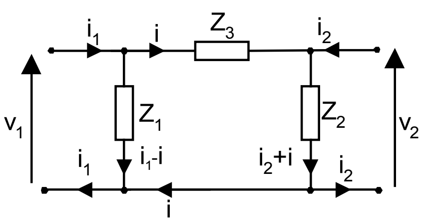
Y_{12} est l'admittance de transfert inverse obtenue avec l'entrée du quadripôle en court-circuit ($v_1=0$)

$$Y_{21}=\left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$

Y_{21} est l'admittance de transfert directe obtenue avec la sortie du quadripôle en court-circuit ($v_2=0$)

Ces définitions des coefficients permettent de calculer et de mesurer simplement ceux-ci.

<u>Exemple 2</u> : (suite) quadripôle en pi



Soit $Y_1=\dfrac{1}{Z_1}$, $Y_2=\dfrac{1}{Z_2}$ et $Y_3=\dfrac{1}{Z_3}$,

Soit i le courant circulant dans l'admittance Y_3.

On a $i=Y_3(v_1-v_2)$

Les équations associées à la matrice admittance sont les suivantes :

$$i_1 = Y_1 v_1 + i = (Y_1 + Y_3) v_1 - Y_3 v_2$$

$$i_2 = Y_2 v_2 - i = -Y_3 v_1 + (Y_2 + Y_3) v_2$$

D'où les éléments de la matrice admittance suivants :

$Y_{11} = Y_1 + Y_3$ $\qquad Y_{12} = Y_{21} = -Y_3$ $\qquad$ et $\qquad Y_{22} = Y_2 + Y_3$

Ces éléments de la matrice admittance peuvent être vérifiés en utilisant les relations entre les éléments de la matrice admittance $\mathbf{Y}$ et ceux de la matrice impédance $\mathbf{Z}$ calculés au paragraphe précédent.

6.2.3 Matrices hybrides

On utilisent les deux équations suivantes pour décrire le quadripôle :

$$v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2$$

$$i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2$$

Sous forme matricielle nous avons :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} . \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

H est la matrice hybride de dimension 2x2

Les matrices hybrides sont utilisées en particulier dans l'étude des transistors.

Nous avons :

$$h_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2 = 0}$$

h_{11} est l'impédance d'entrée lorsque la sortie du quadripôle est en court-circuit ($v_2 = 0$)

$$h_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1 = 0}$$

h_{12} est le gain en tension inverse lorsque l'entrée du quadripôle est ouverte ($i_1 = 0$)

$$h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2 = 0}$$

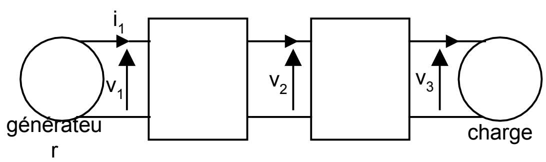
h_{21} est le gain en courant obtenu avec la sortie du quadripôle en court-circuit ($v_2 = 0$)

$$h_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1 = 0}$$

h_{22} est l'admittance de sortie lorsque l'entrée du quadripôle est ouverte ($i_1 = 0$)

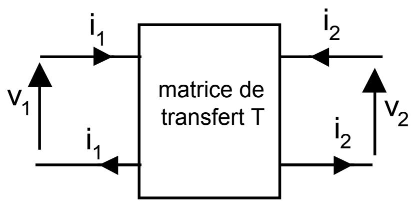
6.2.4 Matrice de transfert ou matrice chaîne

Cette matrice est très pratique pour la mise en cascade des quadripôles.



Les relations définissant la matrice de transfert **T** sont les suivantes :

$$v_1 = Av_2 - Bi_2$$
$$i_1 = Cv_2 - Di_2$$



Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

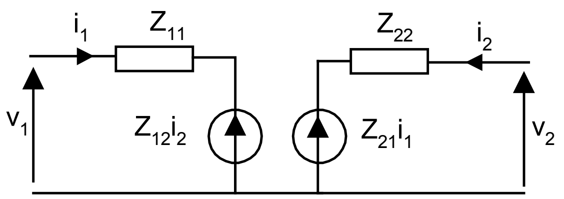
Attention : contrairement aux autres représentations matricielles, pour la matrice de transfert **T** on utilise le courant $-i_2$ (courant sortant du quadripole) à la place du courant i_2 (courant entrant dans le quadripole)
Ce formalisme permet de simplifier les calculs lorsque nous associerons plusieurs quadripoles en cascade.

A et D sont sans dimension
B est une impédance en ohm et C une admittance en ohm^{-1}

6.3 Schémas équivalents du quadripôle

Ces schémas se déduisent directement des relations matricielles impédance, admittance et hybride.

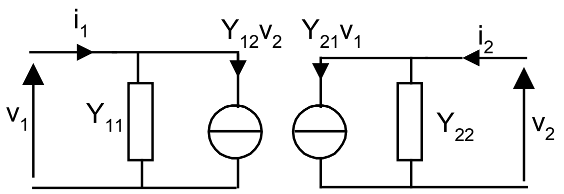
6.3.1 Représentation matricielle impédance



$$v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$$

$$v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2$$

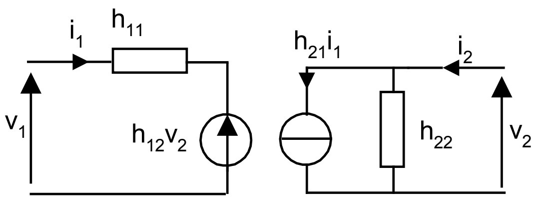
6.3.2 Représentation matricielle admittance



$$i_1 = Y_{11} v_1 + Y_{12} v_2$$

$$i_2 = Y_{21} v_1 + Y_{22} v_2$$

6.3.3 Représentation matricielle hybride



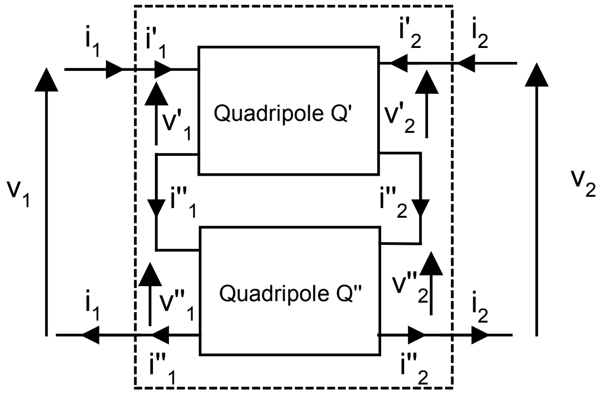
$$v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2$$

$$i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2$$

6.4 Association de quadripôles

Suivant l'association de quadripôles, nous choisirons la matrice la plus appropriée.

6.4.1 Association série



On a les relations suivantes :

$v_1 = v'_1 + v''_1$ et $v_2 = v'_2 + v''_2$

$$\begin{cases} v'_1 = Z'_{11}\, i'_1 + Z'_{12}\, i'_2 \\ v'_2 = Z'_{21}\, i'_1 + Z'_{22}\, i'_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v''_1 = Z''_{11}\, i''_1 + Z''_{12}\, i''_2 \\ v''_2 = Z''_{21}\, i''_1 + Z''_{22}\, i''_2 \end{cases}$$

Comme $i_1 = i'_1 = i''_1$ et $i_2 = i'_2 = i''_2$ nous pouvons écrire les relations suivantes pour le quadripole équivalent :

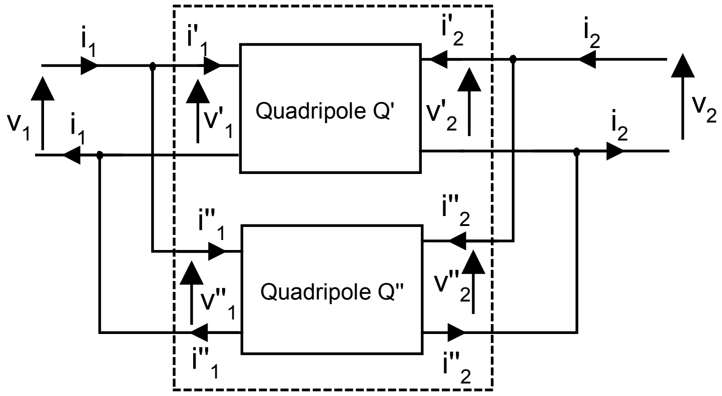
$$\begin{cases} v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 = (Z'_{11} + Z''_{11}) i_1 + (Z'_{12} + Z''_{12}) i_2 \\ v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 = (Z'_{21} + Z''_{21}) i_1 + (Z'_{22} + Z''_{22}) i_2 \end{cases}$$

Ainsi sous forme matricielle, la matrice impédance du quadripole équivalent est égal à la somme des matrices impédances :

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}'] + [\mathbf{Z}'']$$

On ajoute terme à terme les éléments de même indice.

6.4.2 Association parallèle



On a les relations suivantes :

$i_1 = i'_1 + i''_1$ et $i_2 = i'_2 + i''_2$

$$\begin{cases} i'_1 = Y'_{11}\, v'_1 + Y'_{12}\, v'_2 \\ i'_2 = Y'_{21}\, v'_1 + Y'_{22}\, v'_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} i''_1 = Y''_{11}\, v''_1 + Y''_{12}\, v''_2 \\ i''_2 = Y''_{21}\, v''_1 + Y''_{22}\, v''_2 \end{cases}$$

Comme $v_1 = v'_1 = v''_1$ et $v_2 = v'_2 = v''_2$ nous pouvons écrire les relations suivantes pour le quadripole équivalent :

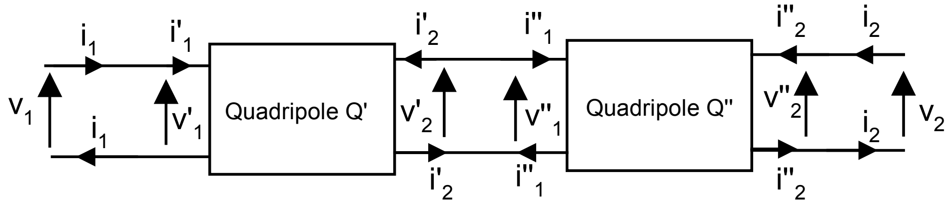
$$\begin{cases} i_1 = Y_{11}v_1 + Y_{12}v_2 = (Y'_{11} + Y''_{11})v_1 + (Y'_{12} + Y''_{12})v_2 \\ i_2 = Y_{21}v_1 + Y_{22}v_2 = (Y'_{21} + Y''_{21})v_1 + (Y'_{22} + Y''_{22})v_2 \end{cases}$$

Ainsi sous forme matricielle, la matrice admittance du quadripole équivalent est égal à la somme des matrices admittances :

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y'}] + [\mathbf{Y''}]$$

On ajoute terme à terme les éléments de même indice.

6.4.3 Association en cascade



Nous allons chercher à déterminer la matrice de transfert du quadripôle résultant de cette association.

Chaque quadripôle est défini par sa matrice de transfert :

Quadripole Q' : $\mathbf{T'} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ Quadripole Q'' : $\mathbf{T''} = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$

Dans cette association, nous avons les relations suivantes entre les courants et entre les différences de potentiel :

$$i_1 = i'_1$$
$$i''_1 = -i'_2$$
$$i''_2 = i_2$$
$$v_1 = v'_1$$
$$v'_2 = v''_1$$
$$v''_2 = v_2$$

On a donc les relations suivantes pour le premier quadripôle :

$$v_1 = v'_1 = A'v'_2 - B'i'_2 = A'v''_1 + B'i''_1$$
$$i_1 = i'_1 = C'v'_2 - D'i'_2 = C'v''_1 + D'i''_1$$

Pour le second quadripole, nous avons :

$$v'_2 = v''_1 = A''v''_2 - B''i''_2 = A''v_2 - B''i_2$$
$$-i'_2 = i''_1 = C''v''_2 - D''i''_2 = C''v_2 - D''i_2$$

D'où :

$$v_1 = A'(A''v''_2 - B''i''_2) + B'(C''v''_2 - D''i''_2)$$
$$i_1 = C'(A''v''_2 - B''i''_2) + D'(C''v''_2 - D''i''_2)$$

Ainsi on en déduit les relations entre v_1, i_1, v_2 et i_2 :

$$v_1 = (A'A'' + B'C'')v_2 - (A'B'' + B'D'')i_2$$
$$i_1 = (C'A'' + D'C'')v_2 - (C'B'' + D'D'')i_2$$

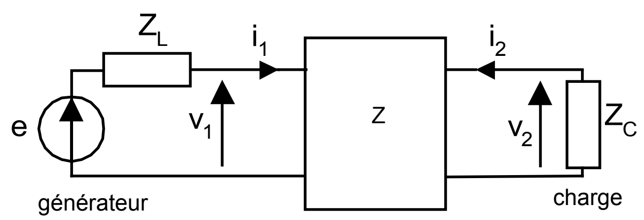
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A'A'' + B'C'' & A'B'' + B'D'' \\ C'A'' + D'C'' & C'B'' + D'D'' \end{bmatrix}$$

La matrice **T** du quadripole Q obtenu par la mise en cascade de deux quadripoles Q' et Q'' est égale au produit matriciel des matrices **T**' et **T**'' :

$$[T] = [T'].[T'']$$

Toutes ces associations de quadripoles se généralisent à un nombre *n* de quadripoles.

6.5 Fonctions de transfert d'un quadripôle



En utilisant la matrice impédance, on a les relations suivantes :

$v_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2$ equation (1)

$v_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2$ equation (2)

$e = Z_L i_1 + v_1$ equation (3)

$v_2 = -Z_C i_2$ equation (4)

Les grandeurs intéressantes sont :

$T_v = \dfrac{v_2}{v_1}$ gain en tension du quadripole. Ce gain est sans dimension (réel ou complexe)

T_C est toujours inférieur à 1 pour un quadripole passif.

$T_i = \dfrac{i_2}{i_1}$ gain en courant

$Z_E = \dfrac{v_1}{i_1}$ impédance d'entrée

$Z_S = \dfrac{v_2}{i_2}$ impédance de sortie

- <u>Gain en courant</u>

$$T_i = \frac{i_2}{i_1}$$

En combinant les équations (2) et (4), on obtient : $-Z_C i_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2$
D'où :

$$\boxed{T_i = \frac{i_2}{i_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_C + Z_{22}}}$$ equation (5)

On peut observer que le gain en courant dépend de la charge Z_C

- <u>Gain en tension</u>

$$T_v = \frac{v_2}{v_1}$$

On va exprimer v_1 en fonction de v_2 à partir des équations (1),(4) et (5).

(4) => $i_2 = -\dfrac{v_2}{Z_C}$

(5) => $i_1 = -\dfrac{Z_C + Z_{22}}{Z_{21}} i_2 = -\dfrac{Z_C + Z_{22}}{Z_{21}} \dfrac{v_2}{Z_C}$

(1) => $v_1 = -Z_{11}\dfrac{Z_C+Z_{22}}{Z_{21}}\dfrac{v_2}{Z_C} - \dfrac{Z_{12}}{Z_C}v_2 = \dfrac{v_2}{Z_C Z_{21}}\left[Z_{11}(Z_C+Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}\right]$

En posant $\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ (ΔZ est le déterminant de la matrice impédance Z)

On obtient finalement :

$$\boxed{T_v = \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_C Z_{21}}{Z_{11}Z_C + \Delta Z}}$$

- Impédance d'entrée

$Z_E = \dfrac{v_1}{i_1}$ c'est l'impédance vue de l'entrée du quadripole

(1) => $v_1 = Z_{11}i_1 - Z_{12}\dfrac{Z_{21}}{Z_C+Z_{22}}i_1 = \dfrac{Z_{11}(Z_C+Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}}{Z_C+Z_{22}}i_1$

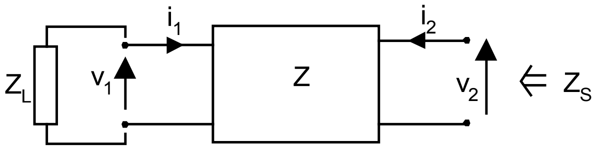
$$\boxed{Z_E = \frac{v_1}{i_1} = \frac{Z_C Z_{11} + \Delta Z}{Z_C + Z_{22}}}$$

- Impédance de sortie

$Z_S = \dfrac{v_2}{i_2}$

C'est l'impédance vue de la sortie du quadripole obtenue en annulant le générateur à l'entrée du quadripole.

Pour déterminer cette impédance, il convient d'annuler le générateur



(1) et (3) => $v_1 = -Z_L i_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2$

$i_1 = -\dfrac{Z_{12}}{Z_{11}+Z_L}i_2$

(2) => $v_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2 = -\dfrac{Z_{21}Z_{12}i_2}{Z_{11}+Z_L} + Z_{22}i_2 = \left(\dfrac{-Z_{21}Z_{12} + Z_{11}Z_{22} + Z_L Z_{22}}{Z_{11}+Z_L}\right)i_2$

$$\boxed{Z_S = \frac{v_2}{i_2} = \frac{Z_L Z_{22} + \Delta Z}{Z_{11} + Z_L}}$$