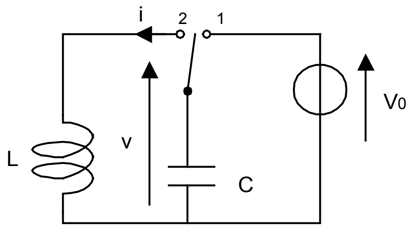
# 5 FACTEUR DE QUALITE ET CIRCUIT RESONNANT

## 5.1 Oscillations libres dans un circuit LC

Soit le circuit composé d'une bobine et d'un condensateur parfait :




Considérons que l'interrupteur est dans la position 1 et que le condensateur est complètement chargé

$$W_{emmagasinée} = \frac{1}{2} C V_0^2$$

A l'instant t=0, on commute l'interrupteur dans la position 2

On a la relation suivante :

$$i = \frac{1}{L}\int v dt = -C\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{LC} v = 0$$

Une solution à cette équation est de la forme

$$v = V\cos(\omega t + \varphi)$$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre du circuit LC

A l'instant t=0, on a $v(t=0) = V_0$ et $i(t=0) = 0$

$$i = -C\frac{dv}{dt} = C\omega V\sin(\omega t + \varphi)$$

$$i(t=0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$v(t=0) = V_0 \Rightarrow V = V_0$$

Ainsi, on a donc les expressions suivantes :

$v = V_0\cos(\omega t)$ et $i = C\omega V_0 \sin(\omega t)$

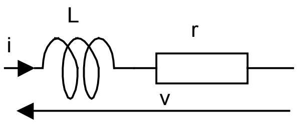
Comme dans le cas du circuit LC série, le circuit LC parallèle parfait entretient donc les oscillations sans amortissement.

En pratique, les bobines réels contiennent une faible résistance en série et les oscillations sont amorties à cause des pertes par effet Joules.

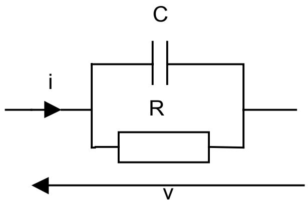
## 5.2 Facteur de qualité d'un circuit

### 5.2.1 Définition

En pratique, les bobines réels contiennent une faible résistance en série (résistance du fil bobiné)




Les condensateurs réels possède également une résistance parallèle de forte valeur qui caractérise les pertes diélectriques (courants de fuites)




Plus faibles seront les pertes meilleur sera l'élément.

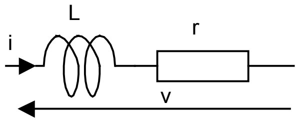
On définit le facteur de qualité d'un élément Q comme suit :

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{\text{energie maximale emmagasine}}{\text{energie dissipée par periode}}}$$

Le facteur de qualité est sans unité. L'énergie est emmagasinée dans les éléments réactifs (bobine ou condensateur) et l'énergie est dissipée par effet Joule (résistance).

### 5.2.2 Facteur de qualité d'un élément réactif réel

<u>Cas de la bobine réelle :</u>
Une bobine réelle est composée d'une bobine pure en série avec une résistance de faible valeur.




soit le courant $i(t) = I_0 \cos(\omega\ t)$ circulant dans ce circuit.

Nous avons vu dans le chapitre « Puissance et Energie » que la quantité maximale d'énergie que peut emmagasiner une bobine est :

$$W_L = \frac{LI_0^2}{2}$$

L'énergie dissipée dans la résistance par effet Joules pendant une période T ( avec $\omega = 2\pi / T$ ) est égale à :

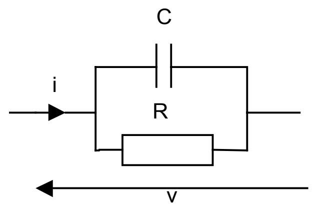
$$W_D = \frac{1}{2} r I_0^2 T$$

On a donc :

$$Q_L = 2\pi \frac{W_L}{W_D} = 2\pi \frac{LI_0^2}{2} \cdot \frac{2}{rI_0^2 T} = \frac{2\pi L}{rT} = \frac{L\omega}{r}$$

Plus la résistance *r* est petite, plus le facteur de qualité $Q_L$ de la bobine réelle est grand.

<u>Cas du condensateur réel :</u>
Un condensateur réel est composée d'un condensateur parfait en parallèle avec une résistance de forte valeur.




soit la différence de potentiel $v(t) = V_0 \cos(\omega\ t)$ aux bornes de ce circuit.
Nous avons vu dans le chapitre « Puissance et Energie » que la quantité maximale d'énergie que peut emmagasiner un condensateur est :

$$W_C = \frac{I_0^2}{2C\omega^2}$$

Comme on a $V_0 = \dfrac{I_0}{C\omega}$, l'énergie $W_C$ peut aussi s'écrire :

$$W_C = \frac{CV_0^2}{2}$$

L'énergie dissipée dans la résistance par effet Joules pendant une période T ( avec $\omega = 2\pi / T$ ) est égale à :

$$W_D = \frac{1}{2} R I_0^2 T = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} T$$

On a donc :

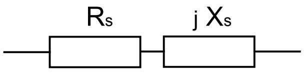
$$Q_C = 2\pi \frac{W_C}{W_D} = 2\pi \frac{CV_0^2}{2} \cdot \frac{2R}{V_0^2 T} = \frac{2\pi CR}{T} = RC\omega$$

Plus la résistance *R* est grande, plus le facteur de qualité $Q_C$ du condensateur réel est grand.

La notion de facteur de qualité peut être étendue à tout type de circuit associant une résistance et une bobine ou un condensateur

### *5.2.3 Généralisation du facteur de qualité*

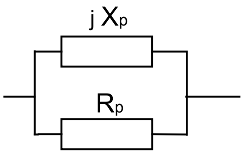
Soit un circuit série dont l'impédance est de la forme $\underline{Z} = R_s + jX_s$




Le facteur de qualité de ce circuit est :

$$\boxed{Q = \frac{|X_s|}{R_s}}$$

Soit un circuit parallèle dont l'admittance est de la forme $\underline{Y} = \dfrac{1}{R_P} + \dfrac{1}{jX_P}$




le facteur de qualité de cette impédance est :

$$Q = \frac{R_P}{|X_P|}$$

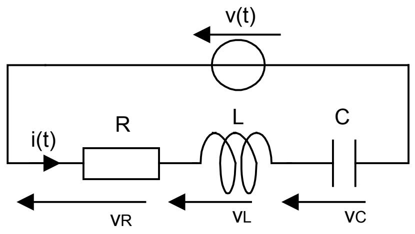
On peut vérifier que les expressions obtenues précédemment se déduisent directement de ces deux formules générales.

Exemple : association d'une bobine d'inductance L et d'une résistance R en série

On a : $R_s = R$ et $X_s = L\omega$, le facteur de qualité est égal à $Q = \dfrac{|X_s|}{R_s} = \dfrac{L\omega}{R}$

## *5.3 Le circuit résonnant série*

Soit l'association en série d'une bobine d'un condensateur et d'une résistance :




Le générateur v(t) impose la pulsation $\omega$ du circuit.
L'impédance complexe est la suivante :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

Son module est égal à : $$\left|\underline{Z}\right| = R\sqrt{1 + Q_0^2\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

Sa phase est la suivante : $$\arg(\underline{Z}) = \arctan Q_0\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

A la pulsation de résonance $\omega_0$ , le courant est maximum et donc le module de l'impédance complexe est le plus faible possible. Cette pulsation s'obtient pour

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad LC\omega_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

On a alors, $\underline{Z} = R$ .
$i$ et $v$ sont donc en phase.

Nous avons vu que le facteur de qualité d'une bobine en série avec une résistance R est égal à $Q_0 = \frac{L\omega_0}{R}$

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Cherchons à exprimer $\underline{Z}$ en fonction de $\omega, \omega_0$, $R$ et $Q_0$ :

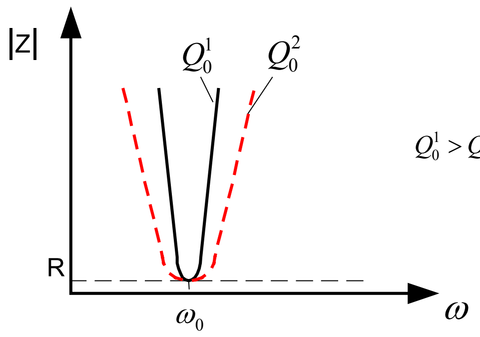
$$\underline{Z} = R + j\left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = R\left( 1 + j\frac{1}{R}\left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) = R\left( 1 + j\frac{L\omega_0}{R}\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{LC\omega_0^2\omega} \right) \right)$$

$$\underline{Z} = R\left( 1 + jQ_0\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) \quad \text{car} \quad \omega_0 = \frac{1}{LC\omega_0}$$

$$\omega \to 0, \qquad |\underline{Z}| \to +\infty \qquad \arg(\underline{Z}) \to -\frac{\pi}{2}$$

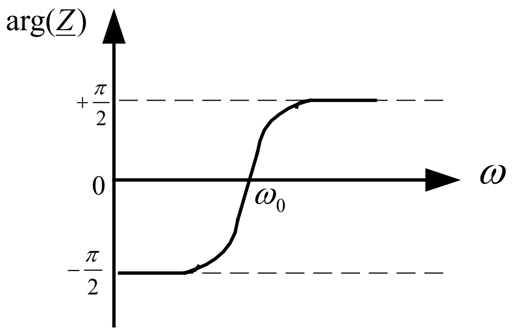
$$\omega = \omega_0, \qquad |\underline{Z}| = R \qquad \arg(\underline{Z}) = 0$$

$$\omega \to +\infty, \qquad |\underline{Z}| \to +\infty \qquad \arg(\underline{Z}) \to +\frac{\pi}{2}$$




$Q_0^1 > Q_0^2$

$$|\underline{Z}| = R\sqrt{1 + Q_0^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$




$$\arg(\underline{Z}) = \arctan Q_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

L'étude d'un tel circuit est intéressante lorsque la pulsation $\omega$ est proche de la pulsation de la résonnance $\omega_0$

$\omega = \omega_0 + \delta\omega$ (avec $\omega$ très petit devant $\omega_0$ )

Calculons alors le terme $\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}$

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega} = \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega_0\omega} \approx \frac{2\omega.\delta\omega}{\omega_0\omega}$$

On a donc

$$\underline{Z} = R\left(1 + jQ_0\frac{2\delta\omega}{\omega_0}\right) \qquad \text{lorsque } \omega \text{ proche de } \omega_0$$

$\dfrac{\delta\omega}{\omega_0}$ est le désaccord relatif (écart de pulsation par rapport à la pulsation $\omega_0$ )

Si le facteur de qualité $Q_0 = \frac{L\omega_0}{R}$ est très élevé ( c'est à dire $R << L\omega_0$ ), le circuit est équivalent à un interrupteur ouvert (hors résonance) ou fermé (en résonance).

Calculons la puissance consommée dans le circuit au voisinage de la résonance lors d'une attaque en tension $\underline{v}(t) = V_0 \exp(j\omega\ t)$

$P = \frac{1}{4}(\underline{v}^*\underline{i} \quad + \underline{v}.\underline{i}^*)$ et $\underline{i}(t) = \frac{\underline{v}}{\underline{Z}}$

On a alors :

$$P = \frac{1}{4}\left(\underline{v}^*.\frac{\underline{v}}{\underline{Z}} \quad + \underline{v}.\frac{\underline{v}^*}{\underline{Z}^*}\right) = \frac{\underline{v}.\underline{v}^*}{4}\left(\frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}^*}\right) = \frac{V_0^2}{4}\left(\frac{\underline{Z}^* + \underline{Z}}{Z.\underline{Z}^*}\right) = \frac{V_0^2}{4}\frac{2R}{|\underline{Z}|^2}$$

avec $|\underline{Z}|^2 = R^2\left(1 + Q_0^2\frac{4\delta\omega^2}{\omega_0^2}\right)$

On obtient finalement :

$$P = \frac{V_0^2}{2R}\frac{1}{1 + 4Q_0^2\frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Pour $\omega = \omega_0$ $\quad P = P_0 = \frac{V_0^2}{2R}$ : puissance consommée dans la résistance

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 + 4Q_0^2\frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Déterminons les pulsations $\omega_1$ et $\omega_2$ pour lesquelles $\frac{P}{P_0} = \frac{1}{2}$

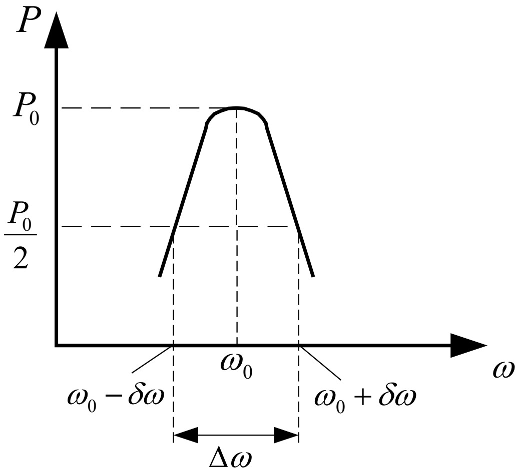
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 4Q_0^2\frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad 4Q_0^2\frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\delta\omega}{\omega_0} = \pm\frac{1}{2Q_0}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q_0} = \omega_0 - \delta\omega$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q_0} = \omega_0 + \delta\omega$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} = 2\delta\omega$$




$\Delta\omega$ est appelée bande passante ou largeur de bande à –3 dB. C'est l'intervalle de pulsation pour lequel la puissance est supérieure à $P_0/2$.
Phénomène de surtension :

Lorsque $\omega = \omega_0$, les différences de potentiel aux bornes de la bobine et du condensateur peuvent être très grandes :

$\omega = \omega_0$ on a $Z = R$

et donc $\underline{i}(t) = \frac{\underline{v}}{\underline{Z}} = \frac{V_0}{R}\exp(j\omega_0 t)$

$$\underline{v}_L = jL\omega_0 \underline{i} = jL\omega_0 \frac{V_0}{R}\exp(j\omega_0 t) = jQ_0 V_0 \exp(j\omega_0 t) = jQ_0 \underline{v}$$

$$\underline{v}_C = \frac{\underline{i}}{jC\omega_0} = \frac{V_0}{jRC\omega_0}\exp(j\omega_0 t) = -jV_0 Q_0 \exp(j\omega_0 t) = -jQ_0 \underline{v}$$

$$\underline{v}_R = R\underline{i} = \underline{v}$$

On a bien : $\underline{v} = \underline{v}_R + \underline{v}_L + \underline{v}_C$

$\underline{v}_L$ et $\underline{v}_C$ sont de même amplitude $V_0 Q_0$ et en opposition de phase à la pulsation de résonnance. Si le facteur de qualité est grand, l'amplitude $V_0 Q_0$ peut aussi être élevée d'ou risque de claquage du condensateur !

Application numérique :

$R = 5\Omega$, L=1mH et C=1nF. $V_0 = 10$ V

On a $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6\, rd/s$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 159 kHz$$

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 200$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0} = 5000 rd / s$$

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = 795 Hz$$

$\left|\underline{V}_c\right| = \left|\underline{V}_L\right| = Q_0 V_0$ =2000V !!