

4 METHODES D'ANALYSE DES RESEAUX

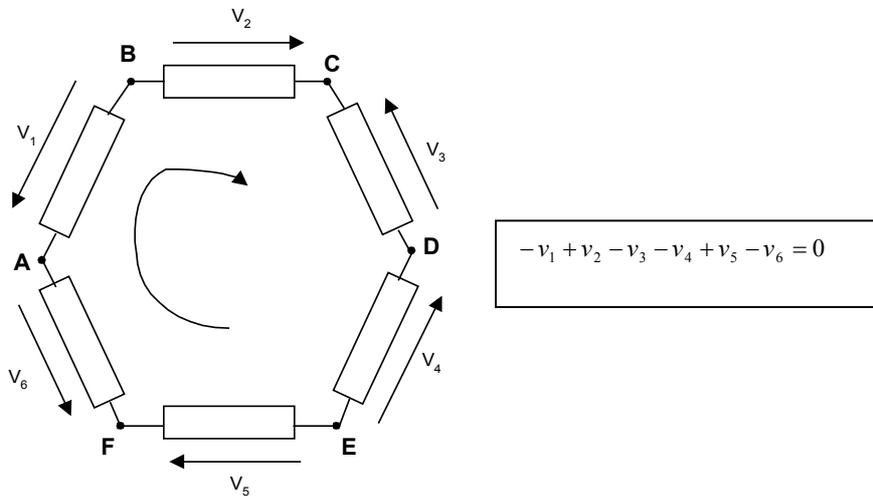
4.1 Introduction

L'analyse des réseaux en régime établi ou permanent repose sur les lois introduites dans les chapitres précédents :

- la loi des mailles : la somme des différences de potentiel le long d'une maille est nulle :

$$\sum_i v_i = 0$$

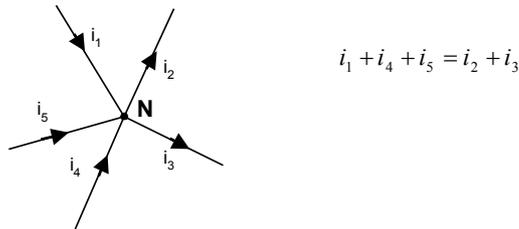
exemple :



- loi des nœuds : la somme des courants entrant est égale à la somme des courants sortant

$$\sum_i i_i = 0$$

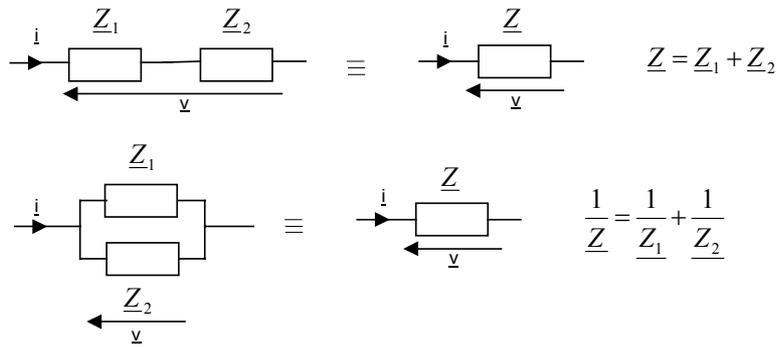
exemple :



- loi des dipôles passifs

$$\underline{v} = \underline{Z}i$$

- loi d'association de dipôle en parallèle et en série



4.2 Méthode des courants des mailles

Cette méthode est basée sur la loi des mailles.

1 – on recherche le nombre de mailles indépendantes. On a la relation suivante :

$$M = B - (N - 1)$$

avec M le nombre de mailles indépendantes, B le nombre de branches et N le nombre de nœuds du réseau.

2 – on attribue à chaque maille un courant de maille et un sens de parcours

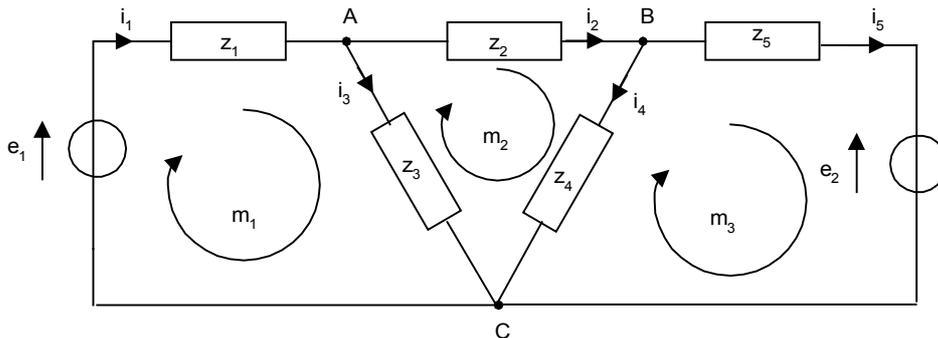
3 – on écrit pour chaque maille l'équation de maille dont les inconnus sont les courants en utilisant la loi des mailles

4 – on résout le système d'équations

5 – on calcule les courants circulant dans chaque branche à partir des courants de maille

6 – on en déduit la différence de potentiel entre deux nœuds en utilisant les lois des dipôles

exemple : soit le réseau suivant :



1 – nœuds A, B, C . $N=3$

branches $(e_1, z_1), (z_2), (z_3), (z_4), (e_2, z_5)$ $B=5$

d'où $M=B-(N-1)=5-(3-1)=3$ mailles indépendantes :

maille m_1 : composée de e_1, z_1 et z_3

maille m_2 : composée de z_2, z_4 et z_3

maille m_3 : composée de e_2, z_4 et z_5

2 – on attribue à chaque maille un courant de maille et un sens de parcours

$$\begin{aligned}im_1 &= i_1 \\im_2 &= i_2 \\im_3 &= i_5\end{aligned}$$

Ainsi, chaque courant peut s'exprimer à partir des 3 courants de maille :

$$\begin{aligned}i_1 &= im_1 \\i_2 &= im_2 \\i_3 &= i_1 - i_2 = im_1 - im_2 \\i_4 &= i_2 - i_5 = im_2 - im_3 \\i_5 &= im_3\end{aligned}$$

3 –équations des mailles :

$$\begin{aligned}e_1 - z_1 i_1 - z_3 i_3 &= 0 \\-z_2 i_2 - z_4 i_4 + z_3 i_3 &= 0 \\-e_2 + z_4 i_4 - z_5 i_5 &= 0\end{aligned}$$

On remplace les courants i par les courants de mailles im . On obtient finalement les équations suivantes :

$$\begin{aligned}e_1 - (z_1 + z_3) im_1 - z_3 im_2 &= 0 \\z_3 im_3 - (z_2 + z_3 + z_4) im_2 + z_4 im_3 &= 0 \\-e_2 + z_4 im_2 - (z_4 + z_5) im_3 &= 0\end{aligned}$$

Il faut noter qu'un signe moins signifie que le courant circule en sens inverse de celui de la figure. Comme nous avons un système à trois équations et trois inconnus, il est possible de le résoudre en utilisant la méthode de substitution ou la règle de Kramer (approche matricielle).

Cette technique présente l'avantage de déterminer tous les courants dans l'ensemble des branches. Les calculs pour un réseau compliqué sont cependant lourds.

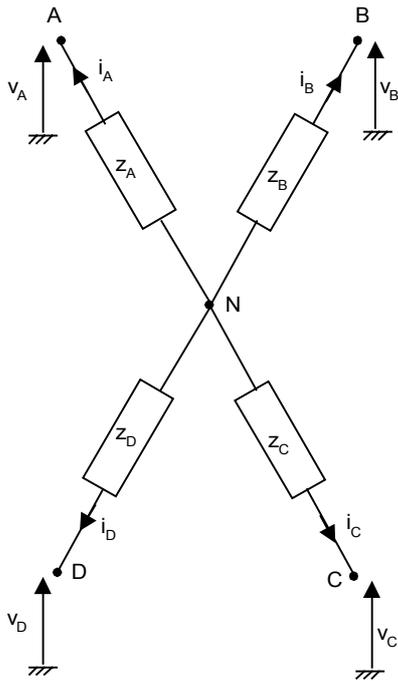
4.3 Théorème de Millman

Le théorème s'énonce comme suit : le potentiel en un nœud quelconque d'un réseau est égal au rapport des deux termes suivants :

- au numérateur, la somme des produits des potentiels des nœuds adjacents par les inductances reliant ces nœuds au nœud considéré
- au dénominateur, la somme de toutes les admittances connectées au nœud considéré.

$$v_N = \frac{\sum_i v_i Y_i}{\sum_i Y_i}$$

remarque : si un générateur de courant est connecté sur le nœud, il doit bien entendu être pris en compte.



Ce théorème est une conséquence directe de la loi des nœuds de Kirchhoff :

$$\sum_i i_i = 0$$

$$i_A = \frac{v_N - v_A}{Z_A} \quad i_B = \frac{v_N - v_B}{Z_B}$$

$$i_C = \frac{v_N - v_C}{Z_C} \quad i_D = \frac{v_N - v_D}{Z_D}$$

$$i_A + i_B + i_C + i_D = 0$$

on a donc la relation suivante :

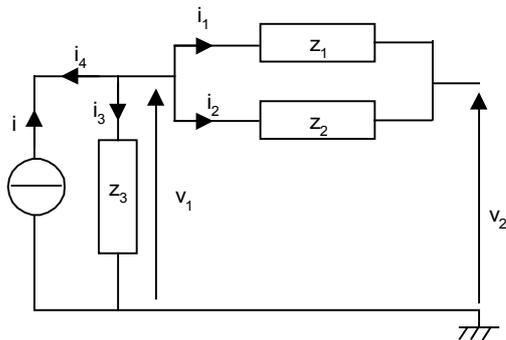
$$\frac{v_N - v_A}{Z_A} + \frac{v_N - v_B}{Z_B} + \frac{v_N - v_C}{Z_C} + \frac{v_N - v_D}{Z_D} = 0$$

en posant $Y_i = \frac{1}{Z_i}$, on obtient :

$$v_N(Y_A + Y_B + Y_C + Y_D) = v_A Y_A + v_B Y_B + v_C Y_C + v_D Y_D$$

$$v_N = \frac{v_A Y_A + v_B Y_B + v_C Y_C + v_D Y_D}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_D}$$

Exemple :



$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$\text{et } i_4 = -i$$

on a la relation suivante :

$$(v_1 - v_2)Y_1 + (v_1 - v_2)Y_2 + v_1 Y_3 - i = 0$$

et donc

$$v_1 = \frac{v_2(Y_1 + Y_2) + i}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

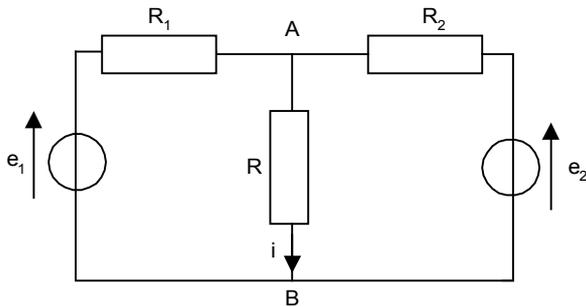
Le courant i du générateur de courant est compté positivement si il se dirige vers le nœud

4.4 Théorème de superposition

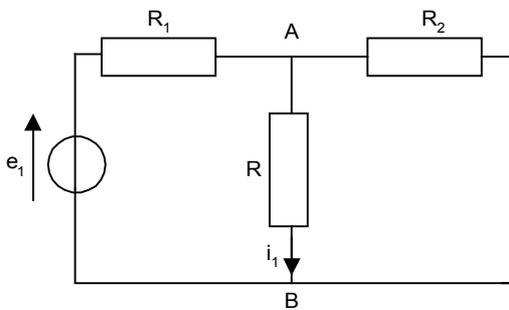
Ce théorème résulte des propriétés des circuits linéaires vus précédemment.

Théorème : si un circuit est soumis à plusieurs sources d'excitation, la réponse de ce circuit est égale à la somme algébrique des réponses à chacune des sources d'excitation prise séparément.

Exemple : soit le réseau suivant



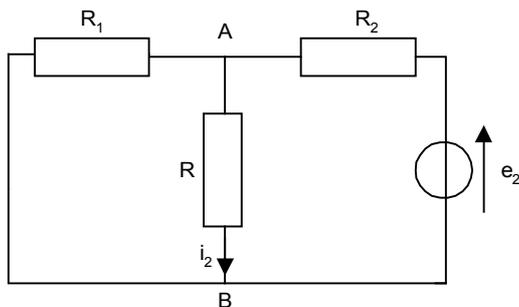
Nous allons décomposer ce réseau en autant de sous-réseau qu'il y a de générateurs. Dans cet exemple il y a deux générateurs. Pour chaque sous-réseau, on ne garde qu'un seul générateur ; les autres générateurs sont remplacés par des court-circuits si ce sont des générateurs de tension ou par des circuits ouverts si ce sont des générateurs de courant.



Dans ce premier sous-réseau nous avons remplacé e_2 par un court-circuit.

$$v_{AB} = e_1 \frac{\frac{RR_2}{R+R_2}}{R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}}$$

$$i_1 = \frac{v_{AB}}{R} = e_1 \frac{\frac{R_2}{R+R_2}}{R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}} = \frac{e_1 R_2}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}$$



Dans le second sous-réseau nous avons remplacé e_1 par un court-circuit.

$$v_{AB} = e_2 \frac{\frac{RR_1}{R+R_1}}{R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1}}$$

$$i_2 = \frac{v_{AB}}{R} = e_2 \frac{\frac{R_1}{R+R_1}}{R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1}} = \frac{e_2 R_1}{RR_2 + RR_1 + R_1 R_2}$$

En appliquant le théorème de superposition on obtient :

$$i = i_1 + i_2 = \frac{e_1 R_2 + e_2 R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}$$

Application numérique : $e_1=10V$, $e_2=-20V$, $R=5\Omega$, $R_1=4\Omega$, $R_2=6\Omega$.

$$i_1 = 0.81A, \quad i_2 = -1.08A$$

$$i = i_1 + i_2 = -0.27A$$

remarque : dans ce cas simple, l'utilisation du théorème de Millman aurait fourni directement ce résultat.

Les théorèmes de Thévenin et de Norton sont des conséquences directes du théorème de superposition

4.5 Théorème de Thévenin et de Norton

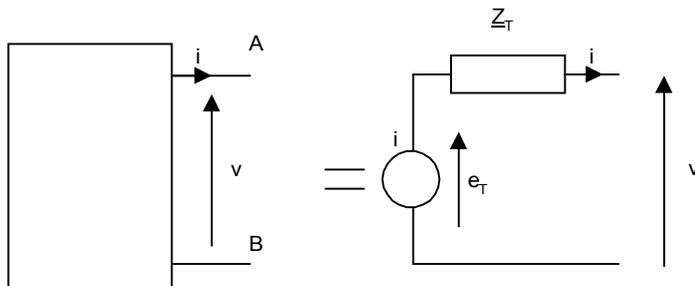
4.5.1 Grandeurs caractéristiques d'un dipôle

Un dipôle est caractérisé par trois grandeurs caractéristiques :

- différence de potentiel à vide : e_T lorsque $i = 0$
- courant de court circuit : i_N lorsque $v = 0$
- impédance de sortie : Z_T

4.5.2 Théorème de Thévenin

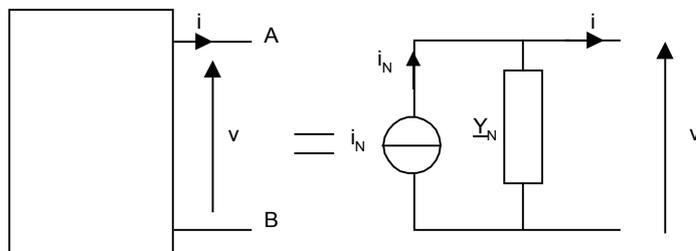
L'ensemble du circuit se trouvant à gauche des deux nœuds A et B peut être remplacé par un générateur de tension idéal de force électromotrice e_T en série avec une impédance interne Z_T .



La force électromotrice e_T est égale à la différence de potentiel v_{AB} mesurée à vide et l'impédance interne Z_T est l'impédance vue des bornes A et B lorsque l'on annule toutes les sources d'excitation du circuit (tous les générateurs de tension idéaux sont remplacés par des courts-circuits et les générateurs de courant idéaux sont remplacés par des circuits ouverts).

4.5.3 Théorème de Norton

L'ensemble du circuit se trouvant à gauche des deux nœuds A et B peut être remplacé par un générateur de courant i_N en parallèle avec une admittance Y_N .



Le théorème de Norton est le théorème dual du théorème de Thévenin.

Le courant i_N se mesure entre les bornes A et B en annulant toutes les sources d'excitation du circuit.

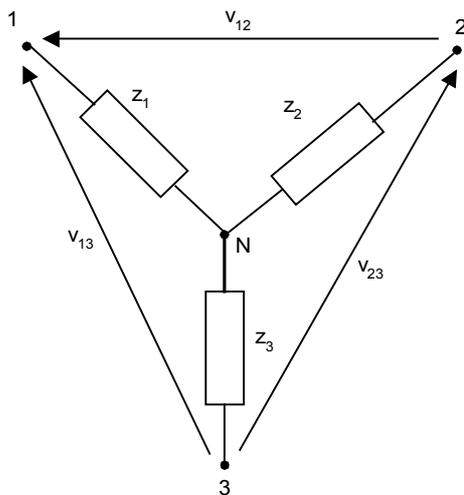
L'admittance Y_N est l'admittance vue des bornes A et B lorsque l'on annule toutes les sources d'excitation du circuit. On a :

$$Y_N = \frac{1}{Z_T}$$

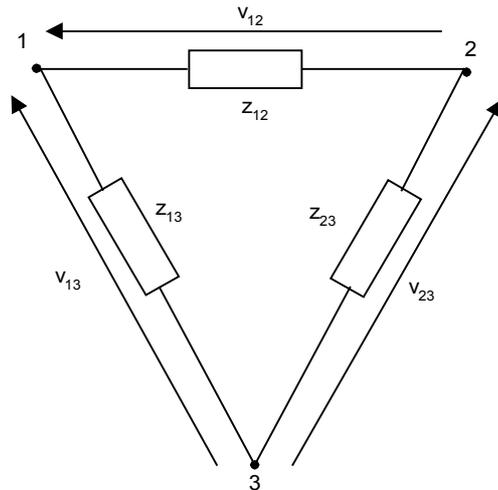
4.6 Théorème de Kennely

Ce théorème permet de transformer pour un circuit tripôle un montage en étoile en un montage en triangle.

Montage étoile



Montage triangle



Cette transformation aussi utile dans l'étude des quadripôles comme les filtres en T et en Π

Théorèmes :

Transformation triangle \Rightarrow étoile

$$Z_1 = \frac{Z_{13}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

Transformation étoile \Rightarrow triangle

$$Y_{12} = \frac{1}{Z_{12}} = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

Démonstration du théorème de Kennely triangle vers étoile :

Appliquons la règle d'association des dipôles en série et en parallèle après avoir débranché le pôle 2 du circuit extérieur. On obtient la relation :

$$Z_1 + Z_3 = \frac{Z_{13}(Z_{12} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (1)$$

En débranchant le pôle 3 du circuit extérieur, on obtient :

$$Z_1 + Z_2 = \frac{Z_{12}(Z_{13} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (2)$$

En débranchant le pole 1 du circuit extérieur, on obtient :

$$Z_2 + Z_3 = \frac{Z_{23}(Z_{13} + Z_{12})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (3)$$

En sommant les équations (1), (2) et (3), on obtient :

$$2(Z_1 + Z_2 + Z_3) = \frac{2(Z_{12}Z_{13} + Z_{12}Z_{23} + Z_{13}Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = \frac{Z_{12}Z_{13} + Z_{12}Z_{23} + Z_{13}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (4)$$

En calculant (4)-(3) on a :

$$Z_1 = \frac{Z_{13}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

En calculant (4)-(1) on a :

$$Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

En calculant (4)-(2) on a :

$$Z_3 = \frac{Z_{13}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$