3 PUISSANCE ET ENERGIE

3.1 Définitions

Si on applique une différence de potentiel $v = v_A - v_B$ entre deux points A et B, les charges se déplaçant de B vers A subissent une variation d'énergie potentielle[2]
Pour une charge élémentaire dq se déplaçant de B vers A, le travail ou l'énergie potentielle dW s'exprime comme suit :

$$dW = vdq \qquad \text{pendant le temps } dt$$

Le déplacement de la charge élémentaire dq sous l'effet du champ électrique induit par la différence de potentiel entre les points A et B en un temps dt induit un courant $i = \dfrac{dq}{dt}$.

D'ou l'énergie potentielle : $dW = vidt$

Le travail fourni (cas d'un générateur) ou reçu (cas d'un récepteur) par l'élément du circuit entre A et B entre les instants t1 et t2 est :

$$W = \int_{t1}^{t2} vidt \qquad W \text{ en Joules}$$

Définition : la puissance instantanée $p_i(t)$ fournie ou reçue par le dipole entre A et B est la dérivée de W par rapport au temps.

$$p_i = \frac{dW}{dt}$$

p_i peut donc aussi être définie comme suit :

$$p_i = vi$$

La puissance instantanée p_i est le produit de la différence de potentiel $v(t)$ par le courant $i(t)$.

Si $p_i > 0$, le dipôle est générateur ; si $p_i < 0$ le dipôle est récepteur.

Définition : la valeur moyenne d'une fonction quelconque $x(t)$ sur l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ est

$$x_{MOY} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$$

Si $x(t)$ est périodique de période T, alors on a :

$$x_{MOY} = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t)dt$$

Si $x(t)$ est sinusoidale, alors $x_{MOY} = 0$

[2] Par convention, on utilisera des lettres minuscules pour les variables et des lettres majuscules pour les constantes

La puissance moyenne P est l'énergie fournie ou reçue sur l'intervalle de temps $t_2 - t_1$

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} dW = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} vidt$$

Si v et i sont sinusoidaux de période T, le calcul de la puissance moyenne P se fait sur l'intervalle de temps T

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T dW = \frac{1}{T}\int_0^T vidt \qquad P \text{ en watts}$$

Définition : la valeur efficace d'une fonction périodique $x(t)$ de période T est :

$$x_{EFF}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

Si la fonction $x(t)$ est sinusoidale, on a : $x(t) = X_0 \sin\omega\, t$

$$x_{EFF}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T X_0^2 \sin^2 \omega\, tdt = \frac{1}{T}\int_0^T X_0^2 \frac{(1-\cos 2\omega\, t)}{2}dt = \frac{X_0^2}{2}$$

D'où $x_{EFF} = \dfrac{X_0}{\sqrt{2}}$

3.2 Cas particuliers

3.2.1 Energie consommée dans une résistance

Cas V et I continus :

$V = RI$

La puissance moyenne est égale à la puissance instantanée P :

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} VIdt = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

L'énergie dissipée thermiquement sur l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ est :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} VIdt = VI(t_2 - t_1)$$

Cas v et i sinusoidaux :

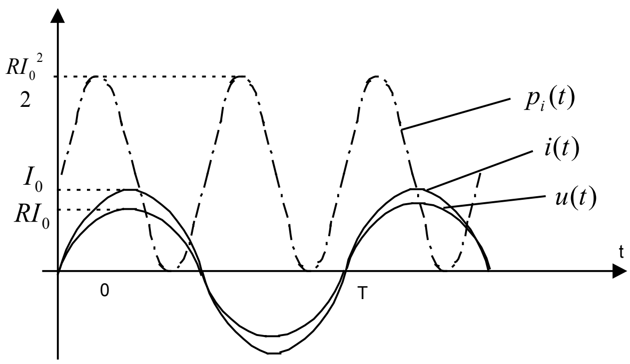
$$i = I_0 \sin\omega\, t \text{ et } v = Ri = V_0 \sin\omega\, t = RI_0 \sin\omega\, t$$

$$p_i = RI_0{}^2 \sin^2 \omega\, t = RI_0{}^2\left(\frac{1-\cos 2\omega\, t}{2}\right)$$

L'énergie dissipée W pendant une période T est :

$$W = \int_0^T p_i dt = \int_0^T RI_0{}^2\left(\frac{1-\cos 2\omega\, t}{2}\right)dt$$

$$W = \frac{RI_0^{\ 2}}{2}T \quad \text{et} \quad P = \frac{RI_0^{\ 2}}{2} = \frac{V_0 I_0}{2}$$



En régime sinusoidal, puisque $I_{EFF} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ et $V_{EFF} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$, on a la relation entre P, V_{EFF}, I_{EFF}

$$P = V_{EFF} I_{EFF}$$

3.2.2 Energie dans une bobine

Cas v et i sinusoidaux :

$$i = I_0 \sin(\omega\ t) \text{ et } v = L\frac{di}{dt} = L\omega\ I_0 \cos(\omega\ t) = L_0\omega\ I_0 \sin\left(\omega\ t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$p_i = L\omega\ I_0^{\ 2} \sin(\omega\ t)\cos(\omega\ t)$$

$$W = \int_{t1}^{t2} p_i dt = L\omega\ I_0^{\ 2}\int_{t_1}^{t_2} \sin(\omega\ t)\cos(\omega\ t)dt = \frac{L\omega\ I_0^{\ 2}}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sin(2\omega\ t)dt \text{ car } \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$W = \frac{L\omega\ I_0^{\ 2}}{2}\frac{1}{2\omega}\left[-\cos(2\omega\ t)\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{LI_0^{\ 2}}{4}\left[\cos(2\omega\ t_1) - \cos(2\omega\ t_2)\right]$$

Calculons l'énergie stockée puis restituée par la bobine pendant une période T

Entre 0 et $\frac{T}{4}$, l'aire soutendue par $p_i(t)$ est positive ; la bobine stocke de l'énergie. Elle se comporte en récepteur.
Calculons l'énergie stockée pendant cette phase. On a :

$$W_{stockéee} = \frac{LI_0^{\ 2}}{4}\int_0^{\frac{T}{4}} \sin(2\omega\ t)dt = \frac{LI_0^{\ 2}}{4}\left[-\cos(2\omega\ t)\right]_0^{\frac{T}{4}} = \frac{LI_0^{\ 2}}{4}\left[\cos(0) - \cos\left(2.\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{4}\right)\right] = \frac{LI_0^{\ 2}}{2}$$

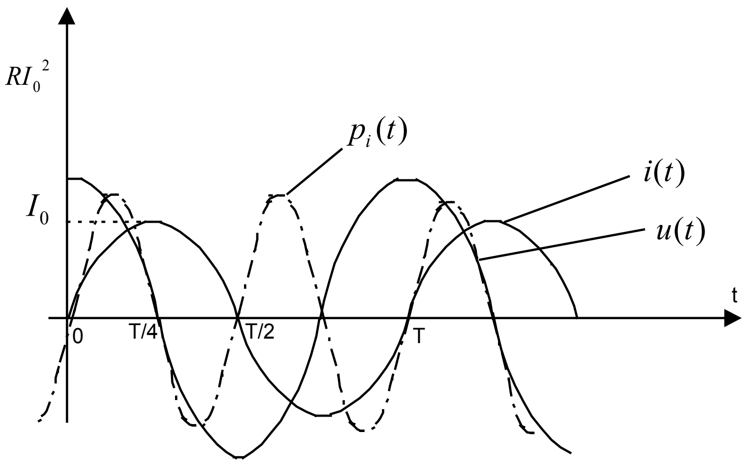
Entre $\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{2}$, l'aire soutendue par $p_i(t)$ est négative ; la bobine restitue de l'énergie. Elle se comporte en générateur.

Calculons l'énergie restituée pendant cette phase. On a :

$$W_{restituée} = \frac{LI_0^{\ 2}}{4}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \sin(2\omega\ t)dt = \frac{LI_0^{\ 2}}{4}\left[-\cos(2\omega\ t)\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} = \frac{LI_0^{\ 2}}{4}\left[\cos\left(2.\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{4}\right) - \cos\left(2.\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{2}\right)\right] = -\frac{LI_0^{\ 2}}{2}$$

Pendant la durée $\frac{T}{2}$, l'énergie dépensée par la bobine est nulle. On dit que le dipôle est purement réactif.

L'énergie stockée (sous forme magnétique) pendant $\frac{T}{4}$ est restituée intégralement pendant le quart de période suivant.



3.2.3 Energie dans un condensateur

Cas v et i sinusoidaux :

$$i = I_0 \sin(\omega\ t) \text{ et } v = \frac{1}{C}\int idt = -\frac{I_0}{Cw}\cos(\omega\ t) = \frac{I_0}{Cw}\sin\left(\omega\ t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$p_i = -\frac{I_0^{\ 2}}{C\omega}\sin(\omega\ t)\cos(\omega\ t)$$

$$W = \int_{t1}^{t2} p_i dt = -\frac{I_0^{\ 2}}{C\omega}\int_{t_1}^{t_2}\sin(\omega\ t)\cos(\omega\ t)dt = -\frac{I_0^{\ 2}}{2C\omega}\int_{t_1}^{t_2}\sin(2\omega\ t)dt \text{ car } \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$W = -\frac{I_0^{\ 2}}{4C\omega^2}\left[-\cos(2\omega\ t)\right]_{t_1}^{t_2} = -\frac{I_0^{\ 2}}{4C\omega^2}\left[\cos(2\omega\ t_1) - \cos(2\omega\ t_2)\right] = \frac{I_0^{\ 2}}{4C\omega^2}\left[\cos(2\omega\ t_2) - \cos(2\omega\ t_1)\right]$$

Calculons l'énergie stockée puis restituée par la bobine pendant une période T

Entre 0 et $\frac{T}{4}$, l'aire soutendue par $p_i(t)$ est négative ; le condensateur restitue de l'énergie. Il se comporte en générateur.

Calculons l'énergie restituée pendant cette phase. On a :

$$W_{stockéee} = -\frac{I_0^{\;2}}{2C\omega}\int_0^{\frac{T}{4}} \sin(2\omega\ t)dt = -\frac{I_0^{\;2}}{4C\omega^2}\left[-\cos(2\omega\ t)\right]_0^{\frac{T}{4}} = \frac{I_0^{\;2}}{4C\omega^{\;2}}\left[\cos\left(2.\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{4}\right)-\cos(0)\right] = -\frac{I_0^{\;2}}{2C\omega^2}$$

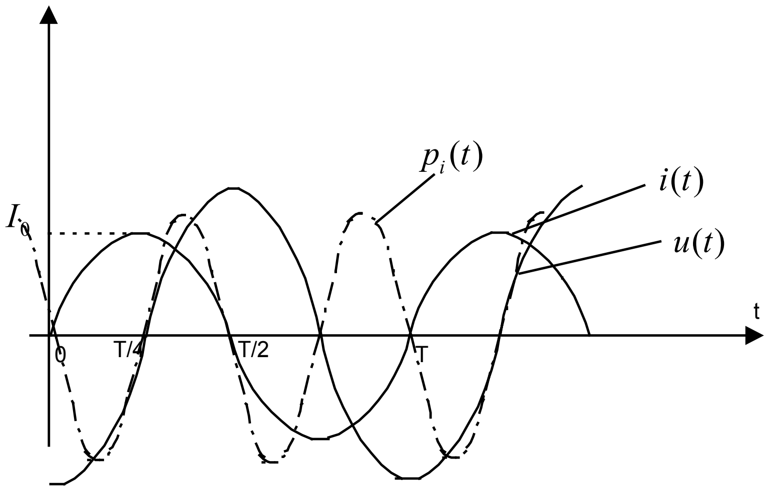
Entre $\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{2}$, l'aire soutendue par $p_i(t)$ est négative ; le condensateur stocke de l'énergie. Il se comporte en récepteur.

Calculons l'énergie stockée pendant cette phase. On a :

$$W_{restituée} = -\frac{I_0^{\;2}}{2C\omega}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \sin(2\omega\ t)dt = -\frac{I_0^{\;2}}{4C\omega^2}\left[-\cos(2\omega\ t)\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{I_0^{\;2}}{4C\omega^2}\left[\cos\left(2.\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{2}\right)-\cos\left(2.\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{4}\right)\right] = \frac{I_0^{\;2}}{2C\omega^2}$$

Pendant la durée $\frac{T}{2}$, l'énergie dépensée par le condensateur est nulle. Comme la bobine, le condensateur est un dipôle purement réactif. L'énergie restituée pendant $\frac{T}{4}$ est stockée (sous forme électrique) intégralement pendant le quart de période suivant.



En résumé :

phase	Bobine L	condensateur
0 à $\frac{T}{4}$	La bobine stocke $\frac{LI_0^{\;2}}{2}$ (magnétique)	Le condensateur restitue $\frac{I_0^{\;2}}{2C\omega^2}$
$\frac{T}{4}$ à $\frac{T}{2}$	La bobine restitue $\frac{LI_0^{\;2}}{2}$	Le condensateur stocke $\frac{I_0^{\;2}}{2C\omega^2}$ (électrique)

Cas de l'association d'une bobine et d'un condensateur :

L'association d'une bobine et d'un condensateur parfait est tel que pendant chaque phase, l'énergie stockée dans la bobine est égale à l'énergie restituée par le condensateur et vice versa.
Cette échange implique la relation :

$$\frac{LI_0^{\ 2}}{2} = \frac{I_0^{\ 2}}{2C\omega^2} \qquad \text{soit } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ pulsation de résonance}$$

L'échange d'énergie se fait donc au rythme de la pulsation de résonance. Nous reviendrons sur les circuits résonnants dans un prochain chapitre .

3.3 Puissance active, réactive et complexe dans un dipole quelconque

$$i = I_0 \cos\omega\ t \qquad \text{et} \qquad v = V_0 \cos(\omega\ t + \varphi)$$

La puissance active est la puissance moyenne. On a :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T vidt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T V_0 I_0 \cos(\omega\ t)\cos(\omega\ t + \varphi)dt \\ &= \frac{V_0 I_0}{2T}\int_0^T (\cos(2\omega + \varphi t) + \cos(-\varphi))dt \end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^T \cos(2\omega + \varphi t)dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^T \cos(-\varphi)dt = \int_0^T \cos\varphi dt = T\cos\varphi$$

On obtient :

$$P = \frac{V_0 I_0}{2}\cos\varphi \quad \text{en} \quad \text{Watt (W)}$$

$\cos\varphi$ est le facteur de puissance du dipole.

On définit également la puissance réactive Q :

$$Q = \frac{V_0 I_0}{2}\sin\varphi \quad \text{en} \quad \text{VoltAmpère (VA)}$$

Il est à noter que la puissance réactive Q est nulle pour une résistance car on a $\varphi = 0$

Exprimons la puissance active P et la puissance réactive Q en fonction du courant $\underline{i}$ et de la différence de potentiel $\underline{u}$.

Soit $i = I_0 \cos\omega\, t$ et $v = V_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$

$$\underline{i} = I_0 \exp(j\omega\, t) \qquad \underline{i}^* = I_0 \exp(-j\omega\, t)$$
$$\underline{v} = V_0 \exp(j\omega\, t)\exp(j\varphi) \qquad \underline{v}^* = V_0 \exp(-j\omega\, t)\exp(-j\varphi)$$

$$\underline{v}^*\underline{i} = V_0 I_0 \exp(-j\omega\, t)\exp(j\omega\, t)\exp(-j\varphi) = V_0 I_0 \exp(-j\varphi)$$

$$\underline{v}\ \ \underline{i}^* = V_0 I_0 \exp(j\omega\, t)\exp(-j\omega\, t)\exp(j\varphi) = V_0 I_0 \exp(j\varphi)$$

$$\underline{v}^*\underline{i} + \underline{v}\ \ \underline{i}^* = V_0 I_0 (\exp(-j\varphi) + \exp(+j\varphi)) = 2V_0 I_0 \cos\varphi$$

Ainsi, on a donc la relation suivante :

$$P = \frac{1}{4}\left(\underline{v}^*\underline{i} + \underline{v}\ \ \underline{i}^*\right)$$

En utilisant le même raisonnement, on obtient

$$Q = \frac{1}{4}\left(\underline{v}^*\underline{i} - \underline{v}\ \ \underline{i}^*\right)$$

La puissance réactive provient des éléments réactifs du circuit.

Finalement nous pouvons définir la puissance complexe d'un circuit par :

$$\underline{P} = P + jQ = \frac{V_0 I_0}{2}\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right) = \frac{V_0 I_0}{2}\exp(j\varphi) = \frac{1}{2}\underline{v}\ \ \underline{i}^*$$

3.4 Force électromotrice et force contre électromotrice

3.4.1 Générateur et force électromotrice

Un générateur convertit une énergie (mécanique, chimique,lumineuse,…) en une énergie électrique.

Soit $dW = p_i dt = vidt$ l'énergie fournie par le générateur au circuit

dW_1 l'énergie dissipée par effet Joule dans le générateur

$dW_1 = Ri^2 dt$

dW_2 l'énergie reçue de l'extérieur par le générateur. En appliquant la loi de conservation de l'énergie, on a la relation suivante :

$dW_2 = dW + dW_1$

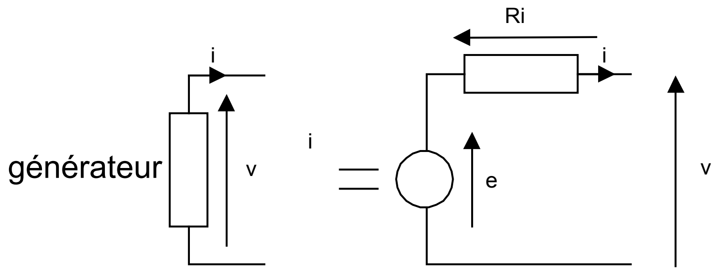
$$dW = dW_2 - dW_1 \qquad <=> \qquad vidt = dW_2 - Ri^2 dt$$

Divisons l'expression par idt :

$$v = \frac{dW_2}{idt} - Ri$$

Soit $e = \dfrac{dW_2}{idt}$ la force électromotrice du générateur .
On a alors la relation :

$$v = e - Ri$$



On définit le rendement η du générateur comme le rapport de l'énergie fournie par le générateur sur l'énergie reçue :

$$\eta = \frac{energie \quad fournie}{energie \quad reçue} = \frac{dW}{dW_2} = \frac{dW_2 - dW_1}{dW_2} = 1 - \frac{dW_1}{dW_2} = 1 - \frac{Ri}{e}$$

Si les pertes sont faibles ($Ri << e$) , alors le rendement η est proche de 1.

3.4.2 Récepteur et force contre électromotrice

Un récepteur transforme une énergie électrique en une énergie (mécanique, chimique,…) et chaleur (énergie dissipée par effet Joule) .

Soit $dW = p_i dt = vidt$ l'énergie reçue par le récepteur

dW_1 l'énergie dissipée par effet Joule dans le récepteur (chaleur).

$dW_1 = Ri^2 dt$

dW_2 l'énergie transformée (mécanique, chimique, …) par le récepteur. En appliquant la loi de conservation de l'énergie, on a la relation suivante :

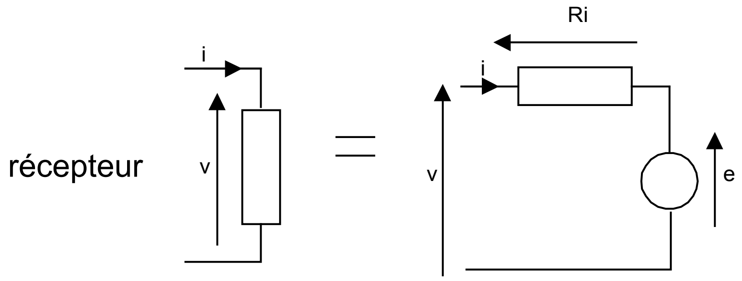
$$dW = dW_1 + dW_2 \qquad <=> \qquad vidt = Ri^2 dt + dW_2$$

Divisons l'expression par idt :

$$v = Ri + \frac{dW_2}{idt}$$

Soit $e = \dfrac{dW_2}{idt}$ la force contre électromotrice du générateur .
On a alors la relation :

$$v = Ri + e$$



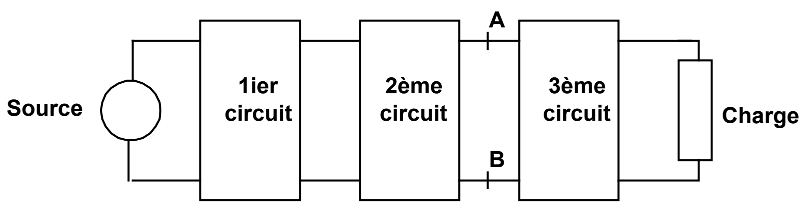
On définit le rendement η du récepteur comme le rapport de l'énergie transformée (mécanique, chimique,…) sur l'énergie reçue par le récepteur :

$$\eta = \frac{energie \quad transformée}{energie \quad reçue} = \frac{dW_2}{dW} = \frac{dW_2}{dW_1 + dW_2} = \frac{e}{e + Ri}$$

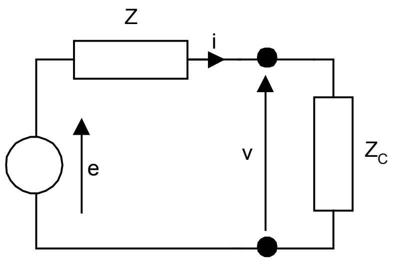
Si les pertes sont faibles ($Ri << e$) , alors le rendement η est proche de 1.

3.5 Adaptation d'impédance

Enoncé du problème : entre une source est une charge on trouve souvent une chaine de quadripoles. Les quadripoles seront étudiés dans un prochain chapitre. L'objectif de l'adaptation d'impédance est de permettre que le maximum de puissance disponible à la sortie d'un circuit soit transmis au circuit suivant. La figure suivante montre un exemple d'une chaine de quadripoles.



L'étude des quadripoles nous montrera que l'ensemble en amont de AB peut être remplacé par un générateur de force électromotrice e d'impédance complexe $\underline{Z}$ et l'ensemble en aval de AB par une impédance complexe $\underline{Z}_C$.
On est donc ramené au problème suivant : soit le schéma suivant :



Avec $\underline{Z} = R + jX$ et $\underline{Z}_C = R_C + jX_C$

Déterminons la relation entre $\underline{Z}$ et $\underline{Z}_C$ pour avoir le maximum de puissance transmise.

La puissance active transmise à $\underline{Z}_C$ est égale à :

$$P = \frac{1}{4}\left(\underline{v}^*\underline{i} + \underline{v}\ \ \underline{i}^*\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underline{Z}_c^*\underline{i}^*\underline{i} + \underline{Z}_c.\underline{i}.\underline{i}^*\right) \qquad \text{comme } \underline{v} = \underline{Z}_c.\underline{i} \text{ et } \underline{v}^* = \underline{Z}_c^*.\underline{i}^*$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underline{Z}_c + \underline{Z}_c^*\right)\ \underline{i}^*\underline{i}$$

$$= \frac{R}{2}\ \underline{i}^*\underline{i} \quad \text{car} \quad \underline{Z}_c + \underline{Z}_c^* = 2R$$

Calculons le courant complexe $\underline{i}$ et son conjugué $\underline{i}^*$

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z} + \underline{Z}_c} \quad \text{et} \quad \underline{i}^* = \frac{\underline{e}^*}{\underline{Z}^* + \underline{Z}_c^*}$$

$$\underline{i}.\underline{i}^* = \frac{\underline{e}.\underline{e}^*}{\left(\underline{Z} + \underline{Z}_c\right)\left(\underline{Z}^* + \underline{Z}_c^*\right)}$$

$$\underline{i}.\underline{i}^* = \frac{\left|\underline{e}\right|^2}{\left(R + R_c\right)^2 + \left(X + X_c\right)^2}$$

d'où

$$P = \frac{R_c}{2}\frac{\left|\underline{e}\right|^2}{\left(R + R_c\right)^2 + \left(X + X_c\right)^2}$$

la puissance P est fonction de R , R_c, X et X_c

P varie de 0 à $\pm\infty$ pour X_c allant de $-\infty$ à $+\infty$. P passe par un maximum pour $\frac{dP}{dX_c} = 0$

$$\frac{dP}{dX} = \frac{R_c\left|\underline{e}\right|^2}{2}\frac{\left(-2\left(X + X_c\right)\right)}{\left(\left(R + R_c\right)^2 + \left(X + X_c\right)^2\right)^2}$$

$\frac{dP}{dX_c} = 0$ lorsque $X = -X_c$

P est alors égale à :

$$P = \frac{R_c}{2} \frac{|\underline{e}|^2}{(R + R_c)^2}$$

Déterminons maintenant R_c pour avoir la puissance maximale transmise

Cette valeur s'obtient lorsque $\frac{dP}{dR_c} = 0$

$$\frac{dP}{dR_c} = \frac{|\underline{e}|^2}{2} \frac{(R + R_c)^2 - 2R_c(R + R_c)}{(R + R_c)^4}$$

$$\frac{dP}{dR_c} = 0 \quad \Leftrightarrow (R + R_c)^2 - 2R_c(R + R_c) = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2 - R_c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow R = R_c$$

Ainsi, pour avoir un transfert maximal de puissance, il faut $\underline{Z}_c = \underline{Z}^*$

Conclusion : une charge est adaptée à un générateur d'impédance interne complexe $\underline{Z}$ lorsque son impédance complexe $\underline{Z}_c$ est égale à l'impédance interne conjuguée du générateur.

Pour cette égalité, on a $P = \frac{|\underline{e}|^2}{8R_c}$