2 LES DIPOLES PASSIFS ELEMENTAIRES

2.1 Introduction

Les composants utilisés en électronique présentent des bornes électriques ou pôles permettant leur connexion dans un réseau. On distingue :

- les dipôles (2 pôles) comme les résistances, les condensateurs, les bobines, les piles, les diodes, …
- les quadripôles (4 pôles) comme par exemple les transformateurs, les filtres.

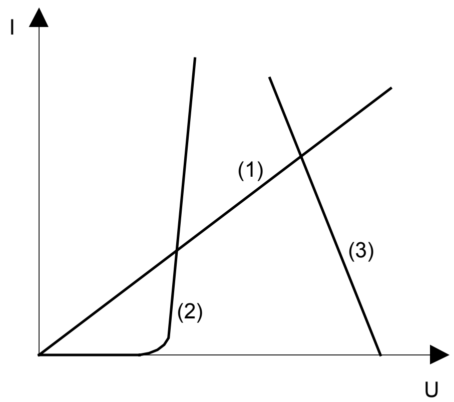
2.2 Caractéristique d'un dipole

Soit un dipole traversé par un courant électrique I et dont la différence de potentiel entre ses bornes est U. La caractéristique de ce dipole est la courbe I=f(U). Suivant l'allure de cette courbe, on peut distinguer différentes familles de dipole.

Dipole linéaire : la caractéristique I=f(U) est une droite d'équation I=aU+b. Par exemple, les résistances et les générateurs de tension et de courant idéaux sont des dipoles linéaires. Si la caractéristique I=f(U) n'est pas une droite le dipole est non linéaire

Dipole passif : un dipôle est passif si son intensité de court-circuit est nulle et si la différence de potentiel à ses bornes est nulle en circuit ouvert. Dit autrement, pour un dipole passif, on a I=0 si U=0.Les trois circuits passifs principaux sont la résistance, la bobine d'induction et la capacité.
Dans les autres cas, on dit que le dipole est actif.

Exemple :



Le dipole 1 est linéaire et passif (il s'agit d'une résistance)
Le dipole 2 est non linéaire et passif (diode)
Le dipole 3 est linéaire et actif (générateur de tension non parfait)
Le dipole 4 est linéaire et actif (générateur de tension parfait)

2.3 Les dipôles passifs élémentaires

2.3.1 Résistance[1]

[1] Certains auteurs utilisent la terminologie résistor pour bien distinguer le nom du dipôle. Dans ce document, nous utiliserons le mot résistance pour désigner le dipôle et sa valeur.

Une résistance est un dipôle constitué par un matériau conducteur et caractérisé par sa résistance R exprimée en ohm (Ω)
La résistance s'obtient comme suit :

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

Où ρ est la résistivité en Ωm , l est la longueur et s est la section du conducteur.
Pratiquement ρ varie entre 10^{-8} et $10^{-6}\Omega m$.

Il existe également des résistances dont la résistance varie en fonction d'un paramètre comme la température (thermistance).

2.3.2 Bobine d'induction

La bobine d'induction est un dipôle constitué d'un conducteur métallique enroulé autour d'un support cylindrique. Lorsqu'un courant traverse celle-ci, elle produit un champ magnétique dans l'espace environnant

Le coefficient d'induction ou inductance qui s'exprime en henry (H) est le suivant :

$$L = \mu N^2 \frac{s}{l}$$

N est le nombre de spires. s est la section du conducteur métallique en m^2 et l est la longueur du support cylindrique.
$\mu = 4\pi 10^{-7}$ H/m dans le vide
Une bobine pure n'existe pas. En pratique, elle est toujours en série avec une petite résistance.

2.3.3 Condensateur

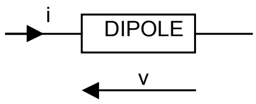
Le condensateur est formé de deux plaques métalliques séparées par un isolant. La répartition de charge sur une plaque influe sur la répartition des charges sur l'autre plaque. Le condensateur est caractérisé par sa capacité C qui s'exprime en farad (F):

$$C = \varepsilon \frac{S}{e}$$

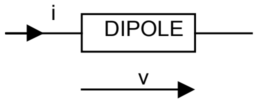
S est la surface de l'armature du condensateur et e est la distance entre les deux armatures.
ε est la permittivité en F/m. Elle dépend du milieu et de la permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8{,}84.10^{-12}$ F/m
Comme 1 farad représente une très grande capacité, on utilise généralement les sous-multiples comme le μF, nF et pF.

2.4 Lois générales des dipôles passifs

Il existe deux choix pour l'orientation du courant i et de la différence de potentiel v

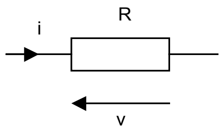


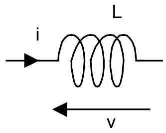
Convention récepteur

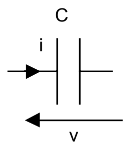


Convention générateur

Nous allons maintenant rappeler les lois générales des 3 types de dipôles passifs élémentaires : résistance, bobine et condensateur :







$v = Ri$	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$v = \dfrac{1}{C}\int idt$
$i = \dfrac{1}{R}v = Gv$	$i = \dfrac{1}{L}\int vdt$	$i = C\dfrac{dv}{dt}$
R en ohms (Ω)	L en henry	C en farad

remarques :

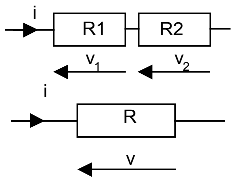
Dans une bobine, le courant ne peut pas subir une variation brutale : $\dfrac{di}{dt} = +\infty$ impliquerait une différence de potentiel $v = +\infty$.

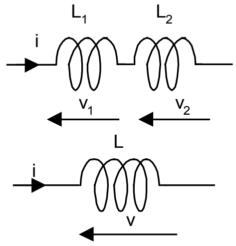
De la même façon, la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier brutalement instantanément : $\dfrac{dv}{dt} = +\infty$ impliquerait un courant $i = +\infty$.

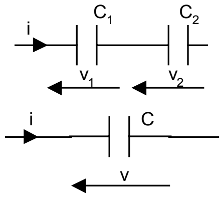
En continu, la bobine est un court-circuit et le condensateur est un circuit ouvert.

2.5 Association de dipôles de même nature

en série :

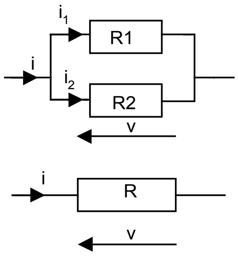
<table>
<tr>
<td>
$v = v_1 + v_2$
$Ri = R_1 i + R_2 i$
$\Rightarrow R = R_1 + R_2$

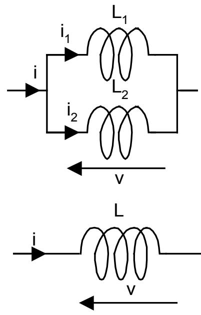
Généralisation :
$R = \sum_i R_i$</td>
<td>
$v = v_1 + v_2$
$L\frac{di}{dt} = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt}$
$\Rightarrow L = L_1 + L_2$

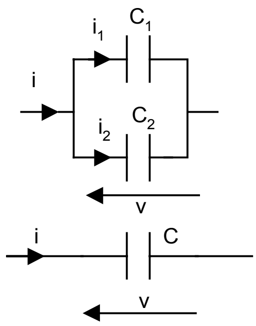
Généralisation :
$L = \sum_i L_i$</td>
<td>
$v = v_1 + v_2$
$\frac{1}{C}\int idt = \frac{1}{C_1}\int idt + \frac{1}{C_2}\int idt$
$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

Généralisation :
$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$</td>
</tr>
</table>

en parallèle :

<table>
<tr>
<td>
$i = i_1 + i_2$
$\frac{v}{R} = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2}$
$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Généralisation :
$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$</td>
<td>
$i = i_1 + i_2$
$\frac{1}{L}\int vdt = \frac{1}{L_1}\int vdt + \frac{1}{L_2}\int vdt$
$\Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$

Généralisation :
$\frac{1}{L} = \sum_i \frac{1}{L_i}$</td>
<td>
$i = i_1 + i_2$
$C\frac{dv}{dt} = C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt}$
$\Rightarrow C = C_1 + C_2$

Généralisation :
$C = \sum_i C_i$</td>
</tr>
</table>

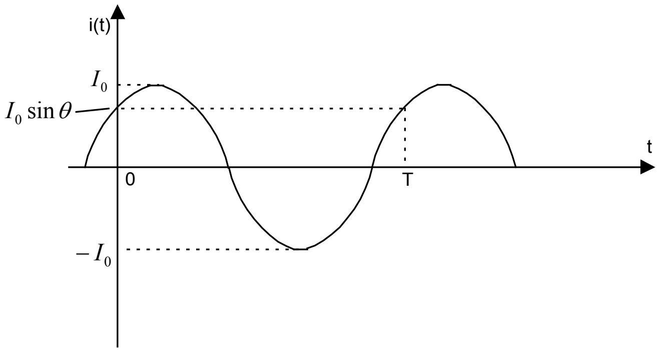
2.6 Lois des dipôles en régime sinusoïdal

Après avoir rappelé les lois générales, nous allons nous intéresser au régime sinusoïdal qui est le régime de fonctionnement le plus souvent utilisé en électronique.

Soit un courant variant en fonction du temps selon la loi sinusoïdale suivante :

$$i(t) = I_0 \sin(\omega\ t + \theta)$$

I_0 est l'amplitude maximum du signal en ampère.



Soit $\Phi(t) = \omega\ t + \theta$ la phase du courant fonction linéaire en fonction du temps en radian.

θ est la phase à l'origine : $\theta = \Phi(0)$

En dérivant Φ par rapport au temps on obtient la pulsation w :

$$\omega \ = \frac{d\Phi}{dt} \text{ en radian/seconde}$$

La fréquence f est le nombre de périodes par seconde. f s'obtient en divisant la pulsation par 2π

$$f = \frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2\pi}\omega \quad \text{en seconde}^{-1} \text{ ou Hertz}$$

Pour éviter des calculs fastidieux lors de l'étude des associations de dipoles en série et en parallèle on utilise deux méthodes pratiques:

- le diagramme de Fresnel
- la notation complexe

2.7 Diagrammes de Fresnel

Les diagrammes de Fresnel permettent de représenter graphiquement i et v par des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormée.

Supposons pour simplifier que la phase à l'origine $\theta = 0$. On a donc $i(t) = I_0 \sin\omega\ t$

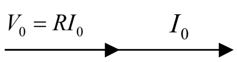
Appliquons les lois d'ohm aux dipôles résistance, bobine et condensateur.

<u>Cas de la résistance</u> :

$$v = Ri$$

$$v = RI_0 \sin\omega\ t = V_0 \sin\omega\ t \quad \text{avec } V_0 = RI_0$$

Les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{v}$ sont en phase

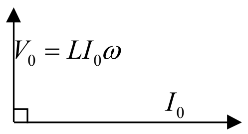


Cas de la bobine :

$$v = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}(I_0 \sin\omega\, t)$$

$$v = LI_0\omega\ \cos\omega\, t = V_0 \sin(\omega\, t + \frac{\pi}{2}) \text{ avec } V_0 = LI_0\omega$$

Pour la bobine, le vecteur $\vec{v}$ est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur le vecteur $\vec{i}$.

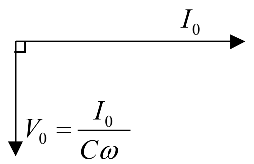


Cas du condensateur :

$$v = \frac{1}{C}\int idt = \frac{1}{C}\int I_0 \sin\omega\, tdt$$

$$v = -\frac{I_0}{C\omega}\cos\omega\, t = V_0 \sin(\omega\, t - \frac{\pi}{2}) \text{ avec } V_0 = \frac{I_0}{C\omega}$$

Pour le condensateur, le vecteur $\vec{v}$ est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur le vecteur $\vec{i}$.



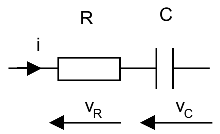
Pour les unités, R , $L\omega$ et $\frac{1}{C\omega}$ sont homogènes à des ohms (Ω).

Lorsque $\omega \to 0$, $L\omega \to 0$, la bobine se comporte comme un court-circuit. et $\frac{1}{C\omega} \to \infty$, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert.

Lorsque $\omega \to \infty$, $L\omega \to \infty$, la bobine se comporte comme un circuit ouvert et $\frac{1}{C\omega} \to 0$, le condensateur se comporte comme un court circuit.

Nous allons maintenant nous interesser à l'association de dipoles de nature différentes.

Cas de l'association d'une résistance et d'une capacité en série :

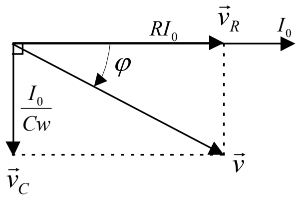


$$i = I_0 \sin\omega\, t$$

$$v_R = RI_0 \sin\omega\, t$$

$$v_C = \frac{1}{C}\int idt = -\frac{I_0}{C\omega}\cos\omega\, t = \frac{I_0}{C\omega}\sin(\omega\, t - \frac{\pi}{2})$$

$$v = v_R + v_C = V_0 \sin(\omega\, t + \varphi)$$



le vecteur $\vec{v}$ est la somme des vecteurs $\vec{v}_R$ et $\vec{v}_C$

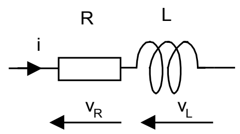
φ est l'angle entre les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{i}$

On a :

$$V_0 = \sqrt{R^2 I_0^2 + \frac{I_0^2}{C^2\omega^2}} = I_0\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$$

$$\tan\varphi = -\frac{1}{RC\omega} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\left(-\frac{1}{RC\omega}\right)$$

<u>Cas de l'association d'une résistance et d'une bobine en série :</u>

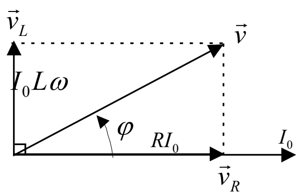


$$i = I_0 \sin\omega\ t$$

$$v_R = RI_0 \sin\omega\ t$$

$$v_L = L\frac{di}{dt} = L_0\omega\ I_0 \cos\omega\ t = L_0\omega\ I_0 \sin(\omega\ t + \frac{\pi}{2})$$

$$v = v_R + v_L = V_0 \sin(\omega\ t + \varphi)$$



le vecteur $\vec{v}$ est la somme des vecteurs $\vec{v}_L$ et $\vec{v}_C$

φ est l'angle entre les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{i}$

On a :

$$V_0 = \sqrt{R^2 I_0^2 + L^2\omega^2 I_0^2} = I_0\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

2.8 Notation complexe et impédance complexe

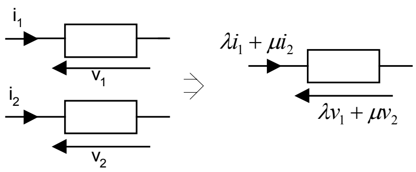
Dans le cas du régime sinusoidal, on utilise les nombres complexes pour simplifier les calculs des dipôles de nature différente.
Une grandeur sinusoidale (courant ou différence de potentiel) est caractérisé par deux nombres : l'amplitude et la phase $\Phi(t) = \omega\ t + \theta$.
Il est donc naturel de représenter une grandeur sinusoidale par un nombre complexe lorsque le circuit est linéaire et que les opérations à effectuer sont aussi linéaires.

Définition : un circuit est linéaire si :

soumis à un courant $i_1(t) = I_0 \cos\omega\ t$, la différence de potentiel est $v_1(t) = V_0 \cos(\omega\ t + \varphi)$

soumis à un courant $i_2(t) = I_0 \sin\omega\ t$, la différence de potentiel est $v_2(t) = V_0 \sin(\omega\ t + \varphi)$

alors soumis à la combinaison linéaire $\lambda i_1(t) + \mu i_2(t)$, la différence de potentiel est de la forme $\lambda v_1(t) + \mu v_2(t)$



Posons $\lambda = 1$ et $\mu = j$. La différence de potentiel associée à la combinaison linéaire
$\underline{i}(t) = i_1(t) + ji_2(t) = I_0(\cos\omega\ t + j\sin\omega\ t) = I_0 \exp(j\omega\ t)$ est la suivante :
$\underline{v}(t) = v_1(t) + jv_2(t) = V_0\left[\cos(\omega\ t + \varphi) + j\sin(\omega\ t + \varphi)\right] = V_0 \exp(j\omega\ t + \varphi)$
Dans le reste de ce document, on se limitera à l'étude des circuits linéaires avec des opérateurs linéaires (addition, multiplication par constante, dérivation, intégration).
Si le courant est de la forme $i_1(t) = I_0 \cos\omega\ t = \Re(\underline{i}(t))$ partie réelle de $\underline{i}(t)$, la différence de potentiel
$v_1(t) = V_0(\cos\omega\ t + \varphi) = \Re(\underline{v}(t))$ partie réelle de $\underline{v}(t)$.
De même la différence de potentiel $v_2(t)$ associé au courant $i_2(t) = I_0 \sin\omega\ t = \Im(\underline{i}(t))$ est
$v_2(t) = V_0(\sin\omega\ t + \varphi) = \Im(\underline{v}(t))$

On définit l'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle comme suit :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}}$$

avec $\underline{i} = I_0 \exp(j\omega\ t)$ et $\underline{v} = V_0 \exp(j\omega\ t + \varphi)$

<u>Cas de la résistance</u> :

Nous avons vu que
$v = Ri$
On a :

$$\underline{v} = RI_0 \exp(j\omega\ t)$$

L'impédance complexe de la résistance est donc : $\underline{Z} = R$

<u>Cas de la bobine</u> :

$$v = L\frac{di}{dt}$$

calculons $\frac{d\underline{i}}{dt}$:

$$\frac{d\underline{i}}{dt} = I_0\left[\frac{d}{dt}\cos(\omega\ t) + j\frac{d}{dt}\sin(\omega\ t)\right]$$

$$= I_0\left[-\omega\ \sin(\omega\ t) + j\omega\ \cos(\omega\ t)\right]$$

$$= I_0\omega\ j\left[\cos(\omega\ t) - \frac{1}{j}\sin(\omega\ t)\right]$$

$$= jI_0\omega\ \left[\cos(\omega\ t) + j\sin(\omega\ t)\right] = j\omega\ \underline{i}$$

dériver revient donc à multiplier par $j\omega$

On a :

$$\underline{v} = L\frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega\ \underline{i} = jL\omega\ I_0\exp(j\omega\ t)$$

L'impédance complexe de la bobine est donc : $\underline{Z} = jL\omega$

Cas du condensateur :

$$v = \frac{1}{C}\int idt$$

calculons $\int \underline{i}dt$:

$$\int \underline{i}dt = \int I_0\cos(\omega\ t)dt + j\int I_0\sin(\omega\ t)dt$$

$$= \frac{I_0}{\omega}\sin(\omega\ t) - j\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega\ t)$$

$$= -\frac{I_0 j}{\omega}\left[\cos(\omega\ t) - \frac{1}{j}\sin(\omega\ t)\right]$$

$$= \frac{I_0}{j\omega}\left[\cos(\omega\ t) + j\sin(\omega\ t)\right] = \frac{1}{j\omega}\underline{i}$$

intégrer revient donc à diviser par $j\omega$

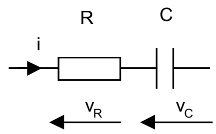
On a :

$$\underline{v} = \frac{1}{C}\int \underline{i}dt = \frac{1}{jC\omega}\underline{i} = \frac{1}{jC\omega}I_0\exp(j\omega\ t)$$

L'impédance complexe du condensateur est donc : $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$

Comme dans le paragraphe précédent sur le diagramme de Fresnel, nous allons maintenant étudier l'association de dipoles de nature différentes en utilisant les impédances complexes.

<u>Cas de l'association d'une résistance et d'une capacité en série :</u>



i sinusoidal => $\underline{i} = I_0 \exp(j\omega\, t)$

v_R => $\underline{v}_R = R\underline{i}$

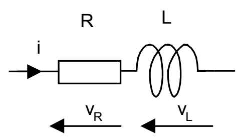
v_C => $\underline{v}_C = \dfrac{\underline{i}}{jC\omega}$

$$\underline{v} = \underline{v}_R + \underline{v}_C = \left[R + \frac{1}{jC\omega}\right]\underline{i} = \underline{Z}.\underline{i}$$

On retrouve le module et l'argument de $\underline{Z} = \left|\underline{Z}\right| \exp(j\varphi)$:

$$\left|\underline{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = -\frac{1}{RC\omega}$$

<u>Cas de l'association d'une résistance et d'une bobine en série :</u>



i sinusoidal => $\underline{i} = I_0 \exp(j\omega\, t)$

v_R => $\underline{v}_R = R\underline{i}$

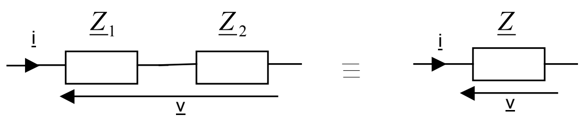
v_L => $\underline{v}_L = jL\omega\ \underline{i}$

$\underline{v} = \underline{v}_R + \underline{v}_L = \left[R + jL\omega\right]\ \underline{i} = \underline{Z}.\underline{i}$

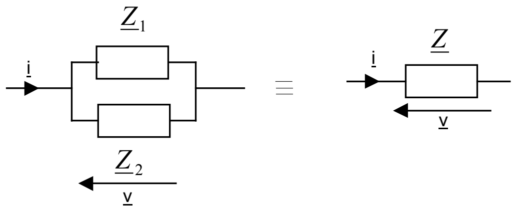
On retrouve le module et l'argument de $\underline{Z} = \left|Z\right| \exp(j\varphi)$:

$$\left|Z\right| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{L\omega}{R}$$

On retrouve avec les impédances complexes les même lois que celles établies pour l'association de dipôles de même nature :



$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$



$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

On a ainsi vu que l'utilisation de l'impédance complexe permet de remplacer les équations différentielles par des équations algébriques ce qui simplifie grandement l'étude de l'association de circuits de nature différente en régime sinusoidal.